

Culegere de probleme MATEMATICĂ

BUCUREȘTI 1988

CULEGERE
DE
PROBLEME
DE
MATEMATICĂ

Din subiectele date la concursurile școlare pe discipline de învățămînt, clasele IV—VIII

Volumul I — ENUNȚURI ȘI INDICAȚII

BUCUREȘTI, 1987

Culegere editată de
CONSILIUL NAŢIONAL AL ORGANIZAŢIEI PIONIERILOR

COLECTIVUL DE REDACTARE A LUCRĂRII :

Clasa a IV-a şi a V-a — prof. CĂRBUNARU CONSTANTIN
Algebră : clasa a VI-a şi a VIII-a — prof. TRIFU MIRCEA
clasa a VII-a — prof. CHEŞCĂ ION
Geometrie : clasa a VI-a şi a VIII-a — prof. GAIU LAURENŢIU
clasa a VII-a — prof. SINGER MIHAELA

COORDONATORI :

Lector univ. dr. BRÂNZĂNESCU VASILE
Prof. MITRACHE IOAN
Prof. HĂRĂBOR CONSTANTIN

Desene : BARON LUMINIŢA
Coperta : BARON STAN

STUDIU INTRODUCTIV

de Acad. **Nicolae Teodorescu**

§.1. Aptitudinile elevilor pentru matematică, rolul și poziția acestora în învățămînt

Aptitudinile pentru matematică și muzică se destăinuiesc cu precădere de timpuriu, ca ghioceii ce răsar din zăpada începuturilor de primăvară. Ele trebuie puse în lumina unui soare cald și surîzător și ferite de a fi înăbușite sau strivite de nepăsare sau miopie.

În trecut și pînă în primele decenii ale secolului nostru se credea că aptitudinile pentru matematică sînt rare și menite unor tineri oarecum deosebiți de ceilalți, puțin maniaci și într-o largă măsură singulari. Revoluția științifico-tehnică, specifică mersului înainte vijelios al vieții societății contemporane, a spulberat această credință generală, transformînd-o într-o prejudecată falsă și a promovat matematica în avangarda progresului cunoașterii științifice, a cuceririlor științei și tehnicii, a înfăptuirilor tehnologiei actuale, care au schimbat ritmul și condițiile vieții cotidiene a unei bune părți din omenire. De aceea, matematica a căpătat o popularitate nebănuită nici de cei mai clarvăzători dintre promotorii ei și a cîștigat un loc de prim-plan în programele de învățămînt, fiind apreciată ca indispensabilă în pregătirea profesională în orice specialitate, la orice nivel.

În țara noastră, matematica ocupă o poziție deosebit de importantă în învățămîntul de toate gradele, începînd cu cel primar, prin reformele succesive ale acestuia și, în special prin cea din ultimii ani, care vizează modernizarea și integrarea învățămîntului cu producția și cercetarea. Programele analitice sînt depozitarele unei tematici deosebit de bogate, prezentînd dificultăți de înțelegere și asimilare, dacă nu sînt sprijinite pe numeroase exerciții și probleme bine alese și bine adecvate diverselor nivele de cunoștințe și tehnicitate ale elevilor.

Manualele sînt prevăzute cu astfel de exerciții și probleme, dar se dovedesc insuficiente pentru a satisface toate cerințele unui învățămînt diferențiat după capacitățile de înțelegere și asimilare ale diferitelor categorii de elevi, care se găsesc în aceeași clasă. În același timp, cei care simt atracție pentru însușirea și stăpînirea matematicii nu pot fi satisfăcuți cu nivelul general al clasei, ci simt nevoia de a-și încerca forțele prin probleme mai deosebite, mai dificile, mai surprinzătoare, care elevilor obișnuiți nu le sînt familiare și uneori nici accesibile. De aceea,

în ultimii douăzeci de ani au proliferat şi au căpătat o mare căutare culegerile de probleme destinate elevilor din licee şi gimnazii, majoritatea avînd ca obiectiv pregătirea pentru examenele de treaptă sau de admitere în învăţămîntul superior.

§.2. Revistele şi concursurile de matematică pentru elevi. Gazeta Matematică

Rolul deosebit de important pe care îl are matematica în societatea contemporană a stimulat punerea în lumină a aptitudinilor copiilor şi adolescenţilor şi prin revistele de matematică elementară, care în trecut erau foarte rare pe întreg globul şi atrăgeau un număr mic de tineri care simţeau chemarea spre matematică şi găseau în ele un sprijin, un îndemn şi un mijloc de cunoaştere reciprocă şi comunicare competiţională. În ţara noastră, în anul 1895, o dată cu inaugurarea măreţului Pod de la Cernavodă, a apărut şi primul număr al revistei Gazeta Matematică, a doua ca vechime pe tot globul şi care de atunci luminează, fără întrerupere, calea tinerilor care iubesc matematica şi vor s-o cultive.

Întemeietorii revistei au avut ca răsplată pentru generozitatea inimilor lor adeziunea caldă şi entuziastă a celor mai buni dintre elevi şi studenţi, ceea ce i-a îndemnat să instituie pentru aceştia o competiţie anuală sub forma unor concursuri de matematică începînd din 1902. Aceste concursuri pentru elevii de liceu au cunoscut o faimă binemeritată, dar nu au avut caracterul de competiţie de masă. Prin instaurarea regimului nostru socialist, Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice rezultată din restructurarea şi dezvoltarea Societăţii Române de Ştiinţe, şi-a luat sarcina de a edita Gazeta Matematică şi Fizică, iar mai tîrziu prin separare, Gazeta Matematică, adresată însă unui mare număr de elevi care începînd de la 5 000—10 000 s-a ridicat repede la 20 000—30 000, astăzi fiind de 11 500—120 000, cu un tiraj care se dovedeşte insuficient faţă de solicitări. Numărul rezolvitorilor de probleme, în special al celor din clasele V—X este covîrşitor, necesitînd mai multe pagini şi folosirea copertei pentru a li se publica numele.

Înţelegînd importanţa unor competiţii matematice pentru a se descoperi şi stimula talentele care — aşa cum spuneam în primele rînduri ale acestui studiu — apar ca ghioceii în primele zile ale primăverii vieţii, **Societatea de Ştiinţe Matematice** a iniţiat concursurile de matematică pentru elevi încă din 1959, sub numele de olimpiade, extinzîndu-le apoi pe plan internaţional, prin olimpiadele internaţionale de matematică, care în prezent au adeziunea unui număr mare de ţări de pe toate continentele şi unde ţara noastră a cunoscut frumoase succese de prestigiu.

Gazeta Matematică este, în concepţia noastră, organul de presă matematică al tineretului nostru, ceea ce se dovedeşte prin tirajul său, ca şi prin colaborarea elevilor, materializată prin sutele de probleme propuse şi prin zecile de mii de probleme rezolvate. Totuşi, acest organ de presă nu se adresa tuturor celor cărora le-ar fi fost folositor şi plăcut, fiindcă nu cuprindea elevii cursului primar. Pentru mulţi dintre colegii

noştri o astfel de autocritică a părut la timpul ei o glumă sau o exagerare întrucîtva demagogică, dar realitatea a dovedit că era justă. Pentru introducerea în tematica revistei a problemelor pentru cursul primar, mii şi mii de copii şi învăţătorii şi învăţătoarele lor şi-au manifestat bucuria şi recunoştinţa faţă de iniţiativa noastră. Imediat ei au răspuns cu rezolvări impresionante prin frăgezimea redactărilor şi apoi chiar prin probleme propuse, ceea ce a justificat încă o dată oportunitatea acestei iniţiative pentru apariţia timpurie şi stimularea aptitudinilor şi afecţiunii pentru matematică.

§.3. Extinderea concursurilor de matematică la clasele IV—VI

Lipsea totuşi ceva, dar era prea devreme pentru a încerca să-l realizăm : o competiţie pentru cei mici, care se simţeau acum integraţi în rîndurile celor mai mari prin faptul că aveau şi ei revista lor şi erau rezolvatori de probleme, ca şi aceştia.

Consiliul Naţional al Organizaţiei Pionierilor, care şi-a luat nobila şi generoasa sarcină de a descoperi, stimula şi fructifica aptitudinile şi zelul investigativ al copiilor patriei noastre a gîndit în acelaşi timp şi cu acelaşi ţel ca noi, că ar fi justificată şi răsplătită îndrăzneala de a extinde concursurile de matematică pentru elevi, care începeau cu clasele a VII-a şi a VIII-a, la clasele mici, începînd cu clasa a IV-a şi integrînd clasele a V-a şi a VI-a în concursurile pentru elevii de gimnaziu.

Iniţiativa Consiliului Naţional al Organizaţiei Pionierilor şi a Societăţii de Ştiinţe Matematice a găsit asentimentul Ministerului Educaţiei şi Învăţămîntului, astfel încît în ultimii ani, începînd cu 1985, au fost organizate concursuri pentru clasele IV—VIII, care au întrunit adeziunea entuziastă a elevilor, învăţătorilor şi profesorilor lor în cadrul general al concursurilor de matematică.

Aceste concursuri, cunoscute şi sub numele de olimpiade, cuprind trei etape : locală, judeţeană şi republicană, o primă selecţie făcîndu-se chiar în cadrul şcolilor. Elevii de clasa a IV-a concurează numai la etapele locală şi judeţeană prin probe de o singură oră avînd în vedere vîrsta lor fragedă şi noutatea competiţiei pentru ei. Cei din clasa a V-a, trec, de asemenea, numai etapele locală şi judeţeană prin probe de două ore. Cei din clasa a VI-a au acelaşi regim de concurs ca şi cei din clasele a VII-a şi a VIII-a, cu cele trei etape, însă spre deosebire de acestea care au două probe de cîte 3 ore, sînt supuşi la o probă unică de două ore.

§.4. Culegerea de probleme editată de C.N.O.P.

Pregătirea concurenţilor din clasele mici, a IV-a, a V-a şi, în general, a celor din clasele a IV—VIII-a nu avea la dispoziţie decît manuale, culegeri de probleme fără destinaţia de a servi în special celor care se angajează în concursuri, precum şi reviste şi broşuri editate pe plan

local în unele județe și bineînțeles Gazeta Matematică, în care există de mai mulți ani rubrici speciale de probleme pentru cei din cursurile primar și gimnazial.

De aceea, se cuvine să fie salutată cu căldură inițiativa Consiliului Național al Organizației Pionierilor de a edita în sprijinul cercurilor științifice pionierești o **„Culegere de probleme de matematică"** formată în mod deliberat din „Subiectele date la concursuri școlare pe discipline de învățămînt, clasele IV—VIII".

Volumul I, care cuprinde **„Enunțuri și indicații"**, este structurat sistematic pe capitole ce corespund programelor analitice în vigoare, cu folosirea notațiilor din manuale în vigoare în actualul an școlar 1987—1988. Volumul II are desigur aceeași structură cuprinzînd rezolvări ale problemelor din concursuri, comentarii și orientări care sînt utile nu numai elevilor, dar și profesorilor și altor categorii de specialiști.

Redactarea lucrării a fost încredințată unui colectiv care și-a împărțit sarcinile cu rîvnă și competență după cum urmează : problemele concursurilor pentru clasele a IV-a și a V-a au fost preluate de prof. **Constantin Cărbunaru** într-o sinteză constructivă cuprinzînd elementele de aritmetică și geometrie, precum și preliminariile inițierii în algebră ; algebra claselor a VI-a și a VIII-a a revenit prof. **Mircea Trifu,** cea din clasele a VII-a, prof. **Ion Cheşcă ;** în ceea ce privește geometria, prof. **Laurențiu Gaiu** și-a asumat problemele claselor a VI-a și a VIII-a, cele din clasa a VII-a revenind prof. **Mihaela Singer.** Un colectiv de coordonatori compus din lector univ. dr. **Vasile Brânzănescu,** prof. **Ioan Mitrache** și prof. **Constantin Hărăbor** a supervizat întreaga lucrare, dîndu-i acea unitate pe care o dorim culegerilor de probleme și care este realizată destul de rar. Mai rămîn de menționat autorii desenelor și coperții care sînt **Luminița Baron** și graficianul **Stan Baron.**

O privire, chiar fugitivă, asupra materialelor corespunzătoare clasei a IV-a este instructivă și surprinzătoare pentru oricine, dar mai ales pentru cei care consideră că în cursul primar nu se pot pune și rezolva adevărate probleme. Experiența făcută de noi prin introducerea rubricii adresate elevilor din clasele I—IV în Gazeta Matematică și care a suportat un fenomen de respingere din partea unui număr semnificativ de activiști și iubitori ai acestei reviste, a fost justificată prin problemele primite spre publicare, dintre care unele se puneau și celor maturi cu frumoase cariere profesionale.

Partea din culegerea de față, destinată elevilor claselor a IV-a și a V-a confirmă din plin valoarea constructivă și stimulativă a acestei experiențe. Într-adevăr, în puținii ani care s-au scurs de la introducerea concursurilor pentru clasele IV—VI s-au adunat destule probleme destinate celor mici din clasele IV—V, care merită să fie luate în considerație prin conținutul și dificultățile conceptuale pe care le prezintă. Vom semnala în analiza succintă a conținutului Culegerii, probleme care nu necesită stăpînirea unor cunoștințe de nivel înalt, dar care pot reține și preocupa și pe matematicienii cu experiență, deși se adresează unor elevi din clasele IV—VIII.

§.5. Analiză succintă şi comentarii

Secţiunea destinată elevilor din clasa a IV-a începe cu un capitol privitor la numerele naturale, un paragraf conţinînd 42 de exerciţii şi probleme asupra scrierii numerelor şi ordinii operaţiilor pune la încercare capacitatea de înţelegere şi de stăpînire a operaţiilor aritmetice de bază.

Cititorul constată cu surprindere că însăşi scrierea condiţionată a numerelor naturale poate pune probleme oricui. Un exemplu, între altele este problema IV.3, care cere să se afle cel mai mic număr natural de cinci cifre satisfăcînd trei condiţii : să nu aibă cifre care se repetă, să fie mai mare decît 20 000 şi să aibă suma cifrelor mai mare decît 19. Indicaţia dată spune numai că forma numărului trebuie să fie $20xyz$. Rezolvitorul trebuie să facă economie de cifre semnificative, observînd şi condiţia de minim pusă, deci va încerca $x = 1$, fiindcă zero nu mai este admis. Cum pînă aici suma cifrelor este 3, va trebui să aibă $y + z \geqslant 17$, tot în baza unei condiţii de minim şi atunci trebuie să formeze suma 17 cu două cifre din care prima să fie mai mică decît cea de a doua. Astfel, este condus să aleagă $y = 8$ şi $z = 9$. Îi mai rămîne pentru a fi un rezolvitor de talia unui laureat al concursului să verifice că soluţia sa este cea mai mică şi unica posibilă, numărul fiind 20189.

Problema a fost dată la etapa judeţeană, în 1986, la Sibiu şi dacă a găsit mulţi rezolvitori, cei ce i-au pregătit şi selecţionat merită inimoase felicitări. Să nu credem însă că este singura care necesită o analiză inspirată, fiindcă exemplul următor IV.4 cere să se dea cinci exemple de numere naturale distincte, astfel ca fiecare dintre ele să se împartă exact la suma cifrelor sale. Indicaţia este de principiu, fiindcă menţionează că este suficient să se găsească unul, celelalte obţinîndu-se prin permutarea cifrelor între ele.

Exerciţiile care urmează ascund şi ele probleme de tehnică matematică, de exemplu, exerciţiul IV.38, în care se cere să se folosească în mod convenabil paranteze, dacă este nevoie, în expresia : $6 \cdot 9 : 3 + 5 - 2$ pentru a obţine ca rezultat de calcul succesiv 9, 21 sau 36.

În paragraful următor, se găsesc grupate probleme care se rezolvă cu cele patru operaţii. În afara celor care au căpătat popularitate prin manuale, reviste şi culegeri şi care cer reconstituirea unor operaţii în care apar steluţe, semnalăm cu plăcere problemele de modelare a unor operaţii din practica de toate zilele, cum ar fi IV.54, unde se compară populaţiile a două oraşe şi creşterile lor anuale şi se cere peste cîţi ani aceste populaţii vor deveni egale.

Metodei figurative îi revin următoarele 39 de probleme cu caracter modelator, care au indicaţii şi sugestii scurte. O a doua metodă folosită în cursul primar este cea a comparaţiei în care găsim şi reprezentări grafice ajutătoare. La sfîrşitul capitolului sînt plasate rezolvări de ecuaţii de gradul întîi cu o necunoscută necesitînd executarea corectă a unor calcule aritmetice.

Înaintînd în stăpînirea operaţiilor cu numere naturale, cititorii sînt chemaţi să rezolve în capitolul II probleme de fracţii şi fracţii zecimale, în special sub formă de aplicaţii modelatoare de probleme şi situaţii din viaţa cotidiană.

Capitole mai scurte sînt atribuite problemelor cu unităţi de măsură, elementelor de geometrie şi unor probleme cu aspecte variate.

Am acordat un spaţiu poate prea mare analizei problemelor date la concursurile elevilor clasei a IV-a, fiindcă aceştia sînt cei care au de depăşit pentru prima dată obstacolele unui concurs, avînd în urmă numai o pregătire de ordin general destinată tuturor copiilor de vîrsta lor. În clasa a V-a ne găsim în gimnaziu, deci pe o treaptă superioară de învăţămînt. Aici se reiau pentru început problemele privitoare la numere naturale, ordinea operaţiilor, rezolvarea prin metoda figurativă, apoi se trece la împărţirea cu rest, la rezolvarea prin metoda ipotezelor sau prin metoda comparaţiei, capitolul încheindu-se cu probleme modelatoare de mişcări.

Un salt calitativ se realizează în capitolul II prin utilizarea literelor în calcul, ceea ce constituie un pas îndrăzneţ spre abstractizare. Aici vom găsi probleme de mulţimi, de stabilire a caracterului adevărat sau fals al unor propoziţii şi vom încheia capitolul cu ecuaţii şi inecuaţii în **N**, în care intervine şi reprezentarea în diverse baze de numeraţie.

Un capitol întreg, capitolul IV cuprinzînd 71 de probleme, revine divizibilităţii numerelor naturale sub variate formulări din care nu lipsesc cele din teoria mulţimilor şi nici probleme dificile. Un exemplu ar fi V.142 unde se cere numărul la care au fost împărţite numerele 1944, 1986 şi 2000 obţinîndu-se respectiv resturile 0, 6 şi 2. Indicaţia recomandă împărţirea cu rest şi folosirea apoi a celui mai mare divizor comun.

Ultimul capitol conţine probleme relative la numere raţionale pozitive. Şi aici se găsesc probleme care necesită abilitate de raţionament şi calcul. Un exemplu ar fi V.186 care cere toate fracţiile cu numitorul 112, cuprinse între $\frac{1}{6}$ şi $\frac{1}{5}$ distingîndu-se cele ireductibile şi care necesită evaluarea părţii întregi a două fracţii raţionale.

Numărul total de probleme pentru clasa a IV-a este de 171, iar pentru clasa a V-a, de 198.

O dată cu clasa a VI-a se păşeşte în calculul algebric cu numere întregi şi raţionale. Un prim capitol reia divizibilitatea numerelor naturale şi se trece apoi la rapoarte şi proporţii în capitolul II. În capitolul III este abordat studiul numerelor întregi şi al celor raţionale, apoi în ultimul capitol găsim ecuaţii în **N** şi **Z**. Secţiunea destinată algebrei este mai redusă ca întindere conţinînd în total 45 probleme, caracterul aritmetic fiind predominant.

Programa analitică rezervă geometriei un loc important şi o mai mare varietate în conţinutul tematic. Şi aici se realizează un salt calitativ prin iniţierea în raţionamentele geometrice, care prezintă dificultăţi de înţelegere prin absenţa unor algoritmi specifici.

Capitolul I este compus din probleme privitoare la puncte, segmente de dreaptă, unghiuri, triunghiuri şi suma unghiurilor unui triunghi. Capitolul II priveşte patrulaterele şi încheie tematica acestui prim an de studiu al geometriei sintetice euclidiene. Cele 56 probleme, care au fost date în diferite centre din ţară, sînt bine selectate şi ordo-

nate, multe dintre ele avînd dificultăţi ce pot fi înlăturate pe baza indicaţiilor. Una dintre acestea este şi VI.G.46, în care figura de bază este un triunghi echilateral ABC, căruia i se duc trisectoarele unghiului BAC şi se fac şi alte construcţii, cerîndu-se măsura unui unghi. În acest scop se evaluează unghiurile unui triunghi şi se caută alte două triunghiuri congruente în care intervine unghiul căutat.

Clasa a VII-a oferă o secţiune de algebră cu 116 probleme, primul capitol reluînd numerele întregi şi raţionale, la care se adaugă numerele iraţionale. Aceasta permite abordarea unei game destul de largi de probleme, în special de calcul cu numere raţionale şi iraţionale. În capitolul II apar pentru prima dată probleme de funcţii şi combinaţii grafice de funcţii de gradul I. Calculului algebric şi aplicaţiilor acestuia le este rezervat capitolul III, unde apar polinoamele şi fracţiile raţionale, care pun probleme variate, unele privitoare la numere raţionale. Deşi nu se face apel la noţiuni de nivel ridicat, problemele care se pun pot fi destul de dificile şi necesită o stăpînire solidă atît a aritmeticii cît şi a noţiunilor de algebră cîştigate pînă acum, cu atît mai mult că se lucrează cu numere în **R**. De exemplu, VII.A.51, care cere descompunerea în factori a unor polinoame de două variabile cu coeficienţi literali, solicită o grupare abilă a termenilor, apoi pentru stabilirea semnului unui număr y dat printr-o sumă de polinoame simple trebuie reconstituit un pătrat perfect.

Capitolul IV iniţiază în studiul identităţilor şi inecuaţiilor, unde se pun probleme care cer îndemînare şi stăpînirea calculului algebric, unele fiind destul de dificile, dacă nu se descoperă punctul de plecare în rezolvare. Un exemplu este VII.A.87 în care se cere verificarea unor inegalităţi cu radicali, apoi o generalizare în care o sumă de numere reale să fie mai mare ca 1986, anul concursului în care a fost dată. Capitolele V şi VI cuprind calcule cu sume şi rezolvări de ecuaţii care, de asemenea, oferă probleme interesante şi variate. Semnalăm pentru dificultăţi VII.A.106 privind aşezarea unui număr de bile în n cutii şi VII.A.113 în care se cere stabilirea unei identităţi în care se foloseşte partea întreagă a unui număr real.

Geometria ocupă un spaţiu egal cu cel acordat algebrei şi începe cu probleme recapitulative ale cunoştinţelor din clasa a VI-a, foarte necesare, deoarece privesc punctul, dreapta, triunghiul şi patrulaterele. Cercul, căruia i se consacră capitolul II, pune 45 de probleme variate şi interesante privitoare la relaţii dintre figurile de bază din clasa a VI-a şi cercul cu elementele sale geometrice.

Indicaţiile date uşurează într-o oarecare măsură dificultăţile de abordare a unora dintre aceste probleme.

Capitolul III abordează problemele de asemănare a triunghiurilor, care se asimilează destul de greu de elevi. De aceea, cele 55 de probleme apărute în concursurile ţinute în numeroase centre din ţară sînt deosebit de instructive. Indicaţiile, care în alte capitole sînt foarte succinte, capătă aici un conţinut mai bogat, cum ar fi cele pentru VII.G.66, care cere stabilirea unei relaţii într-un trapez sau pentru VII.A.68, care cere, de asemenea, stabilirea unei relaţii într-un triunghi, unde apare necesitatea unei analize de situaţii.

Înaintînd pas cu pas în parcurgerea culegerii, ne dăm seama, fără să vrem, de greutăţile pe care le întîmpină elevii în asimilarea şi stăpînirea cunoştinţelor matematice, chiar şi atunci cînd acestea sînt cerute celor mai competitivi dintre ei. În pragul clasei a VIII-a algebra reia problemele de inecuaţii cerînd rezolvări în **N, Z** sau **R,** apoi revine la funcţii de gradul I şi II şi la grafice reprezentative, pentru a aborda apoi din plin polinoamele şi fracţiile raţionale cu aplicaţii aritmetice şi geometrice, o atenţie deosebită fiind acordată divizibilităţii polinoamelor. Fracţiile raţionale pun, de asemenea, probleme variate de simplificări şi reduceri la formele cele mai simple. A fost necesar să se grupeze unele probleme, care nu se încadrează direct în capitolele anterioare, în capitolul IV, destinat problemelor diverse. Reţinem ca mai dificile probleme cum ar fi VIII.A.39 unde se cere să se pună sub forma unei sume a cubului şi pătratului unui număr, o expresie polinomială în a şi b apoi să se determine a şi b astfel încît expresia să fie un pătrat perfect sau VIII.A.90 care cere să se arate că un număr de forma $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ se divide cu 1897, dacă n este un număr natural oarecare. Indicaţia recomandă descompunerea în factori a expresiilor de forma $x^n - y^n$.

Geometria supune pe elevii clasei a VIII-a unui şoc, care poate fi greu de suportat, dacă nu este amortizat cu grijă printr-o predare sugestivă şi plină înţelegere. Trecerea de la plan la spaţiu necesită folosirea modelelor spaţiale şi educarea viziunii în trei dimensiuni. De aceea, problemele de geometrie prezintă dificultăţi mai mari în clasa a VIII-a.

Culegerea le rezervă 64 probleme, începînd cu cele de paralelism în spaţiu, trecînd apoi la perpendiculare pe plane, unde se pot îmbina proprietăţi ale figurilor din plan cu altele spaţiale. Capitolul III se ocupă de unghiurile diedre unde, de asemenea, apar figuri plane situate în diverse plane şi realizate cu construcţii care trebuie bine intuite, iar măsura diedrelor prezintă prin ea însăşi dificultăţi.

Proiecţiile în spaţiu permit să se pună probleme de colinearitate, de măsură de unghiuri şi segmente etc., care completează cultura geometrică a elevilor.

Ultimul capitol tratează probleme de poliedre, care pot fi foarte variate atît prin poliedrele folosite cît şi prin secţiunile şi alte construcţii geometrice legate de ele.

Avînd în vedere dificultăţile întîlnite în problemele spaţiale, indicaţiile sînt în secţiunea de geometrie mult mai generoase decît în celelalte secţiuni ale culegerii, ocupînd 10 pagini.

Volumul II care cuprinde rezolvările şi rezultatele problemelor, precum şi diverse îndrumări utile celor care vor să-şi îmbogăţească volumul de cunoştinţe şi tehnici de lucru, se recomandă de la sine.

§.6. Concluzii

Analiza fugitivă şi succintă a Culegerii de probleme, însoţită de comentarii făcute de pe poziţia profesorului care nu uită că a fost cîndva elev, ne-a dat posibilitatea de a aprecia în primul rînd valoa-

rea intrinsecă a materialelor selectate din concursurile locale şi judeţene ţinute pe tot cuprinsul ţării de-a lungul a trei ani de experienţă. Dar, în acelaşi timp, ne-am dat seama de importanţa iniţiativei luate de CNOP de a edita această culegere adresată celor mai mici dintre participanţii concursurilor de matematică pentru elevi.

Într-adevăr, aceştia au nevoie de un sprijin puternic şi de un îndemn de a se angaja în concursuri de matematică şi considerăm că această culegere este de natură a-i cîştiga şi de a-i îndruma. Nu dispunem de multe date privind evoluţia acestor concursuri în toate centrele din ţară, dar global este important să semnalăm că ele atrag un mare număr de elevi, participarea la etapa pe şcoli fiind de 40%. În acelaşi timp, calitatea rezultatelor a crescut de la un an la altul. Aceasta se reflectă în media etapei pe ţară, care în 1985 era de 7.15, pentru a ajunge în 1988 la 7.50. La etapa pe ţară din acest an, 72% din concurenţi au obţinut medii peste 7, iar 58% dintre ei au cîştigat premii şi menţiuni la medii peste 8.

Reunind numeroase probleme într-o culegere structurată pe capitole corespunzătoare categoriilor de probleme care statistic se dovedesc a constitui corpul principal al tematicii acestor concursuri, colectivul de autori are meritul de a pune în lumină această tematică şi de a feri pe micii concurenţi de surprize dăunătoare. Fiindcă o surpriză cauzată de artificii neaşteptate poate frîna concurenţii, împiedicîndu-i de a rezolva celelalte probleme şi cauzîndu-le insuccese nemeritate.

Indicaţiile date problemelor fiecărei clase nu constituie decît suporturi sumare pentru rezolvări, dar stimulează pe rezolvitori să găsească drumul desăvîrşirii rezolvărilor.

Colectivul de autori şi coordonatorii ediţiei merită din plin felicitări pentru modul în care au ştiut să aleagă, să gradeze şi să ordoneze pe categorii problemele disparate date în toate centrele din ţară. Sîntem siguri că în cercurile de matematică pionereşti, care nu se vor mulţumi numai cu rezolvări, ci vor căuta ei înşişi şi alte soluţii, aşa cum am constatat cu plăcere la fiecare etapă pe ţară, culegerea va deveni rapid motorul ambiţiilor rezolvitorilor.

În aşteptarea continuării la această lucrare, în care vom găsi cu rezolvări şi problemele date la etapele pe ţară, salutăm, împreună cu nenumăraţii mici beneficiari, darul pe care CNOP îl face pionierilor prin această preţioasă culegere de probleme pentru ei, ca şi pentru profesori şi alţi specialişti, pentru elevii de liceu şi pentru studenţii care vor deveni profesori.

Acad. N. Teodorescu

CLASA A IV-A

CAPITOLUL I

NUMERE NATURALE

IV.1.1 **Scrierea numerelor. Ordinea operațiilor**

IV.1. Care este numărul natural, cel mai mic, scris cu patru cifre, care se repetă ?

(Etapa locală, 1986, Dolj)

IV.2. Găsiți cel mai mare număr natural de cinci cifre mai mic decît cel mai mare număr natural de cinci cifre diferite.

IV.3. Aflați cel mai mic număr natural de cinci cifre care îndeplinește toate condițiile următoare :

a) nu are cifre care să se repete ;

b) este mai mare decît 20000 ;

c) are suma cifrelor sale mai mare decît 19.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

IV.4. Dați cinci exemple de numere naturale de trei cifre distincte, astfel încît fiecare din ele să se împartă exact la suma cifrelor sale.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

IV.5. Calculați : $7+0-5\cdot 0+10:1$.

(Etapa județeană, 1985, Alba)

IV.6. $(306:3+87-12)\cdot 0$.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

IV.7. a) $50+50:50-50$;

b) $(23+23\cdot 23):23$.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

IV.8. $4\,800:200+25\cdot 10-17\cdot 11$.

IV.9. $9+(9\cdot 9:9-9)+220-20\cdot 0$.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

IV.10. $12\cdot 10:6-(200-20):9+36:18-2$.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

IV.11. $(3\,044 + 2\,056) : 17 + 3\,075 : 15 - 6\,992 : 38 : 23.$

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.12. $25 \cdot (160 - 30 \cdot 5) - 8 - (24 + 6 : 6).$

(Etapa locală, 1986, Bacău)

IV.13. $(1\,800 - 1\,250) : 10 + 220 : 11 \cdot (12\,000 : 40 - 600 : 15 + 25).$

(Etapa locală, 1986, Covasna)

IV.14. $255 : (65 - 50) - (80 : 4 - 256 \cdot 0) : 2.$

(Etapa locală, 1986, Galați)

IV.15. $1\,600 + 800 : (400 - 200) - (100 - 50) : 25.$

(Etapa municipală, 1986, București)

IV.16. $(180 - 3 \cdot 10) : 5 + 24 \cdot 9 - (120 - 312 : 12).$

(Etapa județeană, 1985, Alba)

IV.17. $(60 \cdot 3 - 30) : 5 + 240 \cdot 3 - (120 - 312 : 12).$

(Etapa locală, 1986, Argeș)

IV.18. $(8\,900 + 3\,560 \cdot 205) : 178 - 109.$

(Etapa județeană, 1985, Brașov)

IV.19. $(750 \cdot 306 - 375 \cdot 208) : (3\,700 : 185 + 630 : 6).$

(Etapa locală, 1985, Dolj ; 1986, Brăila)

IV.20. $400 + 480 : 4 - [680 : 20 + 4 \cdot (20 + 12 + 18)].$

(Etapa locală, 1986, Bihor)

IV.21. $[724 \cdot 84 - 976 \cdot 35 + (1\,610 \cdot 27 - 2\,146)] : 330.$

(Etapa locală. 1985, Bistrița-Năsăud)

IV.22. $[21\,600 - 1\,875 \cdot (100 - 333\,333 : 3\,663)] : 675.$

(Etapa locală, 1986, Tulcea)

IV.23.

$$[(7\,350 : 35 + 124\,569 : 9 - 124 \cdot 56 - 107) \cdot 3] : (11 \cdot 51 + 13 \cdot 12 + 283).$$

(Etapa județeană, 1985, Bihor)

IV.24. $48\,000 - 6\,000 : 2\,000 + (300 + 80 : 40) \cdot 7 - 48\,125.$

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

IV.25. $[280\,026 - 89\,275 - 119 \cdot (1\,237\,545 : 4\,005) - 512] : 147.$

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

IV.26. $1 + 5 \cdot \{32 : 8 + 0 \cdot [40 + 8 \cdot (200 : 5 - 72 : 2)]\}.$

(Etapa locală, 1985, Neamț)

IV.27. $30 + 5 \cdot \{32 : 8 + 5 \cdot [40 + 8 \cdot (200 : 5 - 72 : 2)]\}.$

(Etapa locală, 1986, Mureș)

IV.28. $1\,500 + \{250 : 5 + 15 : 3 \cdot [265 - (50 : 25 + 2) \cdot 65] \cdot 150\}$.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

IV.29. $2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\,004 - 4 \cdot (8 : 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 : 2)]\}$.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

IV.30. $2\,500 + \{260 : 5 + 15 : 3 \cdot [265 - (50 : 25 + 2) \cdot 65] \cdot 150\}$.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

IV.31. $30 + \{32 : 8 + 5 \cdot [8 \cdot (20 : 2 - 70 : 10)]\} : 2$.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

IV.32. $2 + 2 \cdot 3 \cdot \{[(7 \cdot 3 - 5) + 2 \cdot 6] : 4 + 5\} \cdot 10 - [(10 + 10^2) \cdot 5 - 60]$.

(Etapa locală, 1985, Hunedoara)

IV.33. $[6 \cdot 10^3 - (25 \cdot 4 - 40) \cdot 5] - (10^2 \cdot 7 + 10^3 : 25 \cdot 35)$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila, Hunedoara)

IV.34. $\{[42 \cdot 44 + (9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6) : 72] : (121 + 14 \cdot 15)\} + 4$.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

IV.35. Se dau numerele :

$a = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 6 - 72 : 8$;
$b = 64 : 8 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4$;
$c = 42 : 6 - 16 : 8$.

Calculați : a) $3 \cdot a - 2 \cdot b + c$;
c) $4 \cdot a - 3 \cdot b + 2 \cdot c$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

IV.36. Se dă exercițiul : $5 \cdot 4 : 2 + 8 - 2$.

Așezați corespunzător paranteze pentru a obține rezultatul : a) 40 ; b) 16 ; c) 48.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

IV.37. În exercițiul $5 \cdot 4 : 2 + 8 - 2$ folosiți paranteze pentru a obține rezultatul zero.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

IV.38. În exercițiul : $6 \cdot 9 : 3 + 5 - 2$ folosiți convenabil paranteze, dacă este nevoie, pentru a obține : a) 9 ; b) 21 ; c) 36.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

IV.39. a) Calculați : $3 \cdot 8 : 4 + 6 \cdot 2 - 18$;

b) Așezați în acest exercițiu o pereche de paranteze (rotunde) astfel încît rezultatul să fie 24.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.40. Se dau numerele : $\mathbf{a} = [(20 + 5 : 5) \cdot 10 - 10] : 40$;
$\mathbf{b} = [(20 : 4) \cdot 5 - 20] \cdot 2 - 4$.

Care din afirmațiile $\mathbf{a} > \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ este adevărată ?

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

IV.41. Se dau numerele : $a = 9 \cdot 7 + 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1$;
$b = 9 \cdot 7 - 7 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 1$.

Cu cît este mai mare suma $a + b$ față de diferența $a - b$?

(G.M. nr. 9 — 1984, Etapa locală, 1985, Constanța)

IV.42. Adunați toate numerele naturale de 3 cifre, fiecare scris numai cu aceeași cifră, care se repetă. Ce obțineți ?

(Etapa locală, 1986, Prahova)

IV.1.2 Probleme care se rezolvă cu cele patru operații

IV.43. Reconstituiți adunarea :

```
 1*5* +
 41*7
 ----
 6*86
```

(Etapa locală, 1986, Suceava)

IV.44. Găsiți cifrele lipsă de la următoarea înmulțire :

```
     45*6 ·
      *2*
  -------
    **144
    9*7*
  13*08
  -------
  1*69*6*
```

(Etapa locală, 1985, Brașov)

IV.45. Se consideră numerele $n_1 = \overline{1a5b}$, $n_2 = \overline{41c7}$ și $n_3 = \overline{6d86}$. Găsiți cifrele a, b, c, d astfel încît să avem : $n_1 + n_2 = n_3$.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

IV.46. Găsiți cifrele lipsă în înmulțirile :

```
a)   472 ·        b)   362 ·
      **                **
   -----              -----
    1416               ***
    944               3**8
   -----              -----
   *****              **3*4
```

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

IV.47. La cel mai mic număr natural de 5 cifre adunați cel mai mare număr natural de 4 cifre, ce conține cifra 7 de două ori și apoi, din sumă scădeți cel mai mic număr natural de 5 cifre ce conține cifra 3 de două ori. Ce obțineți ?

(Etapa locală, 1986, Caraș-Severin)

IV.48. Folosiți de trei ori numărul 9 și două operații aritmetice pentru a obține numărul 10.

(Etapa locală, 1985, Argeș)

IV.49. Scrieţi toate numerele naturale de două cifre care se împart la 7, fără rest şi au suma cifrelor 10.

(G.M. nr. 4/1985, Etapa locală, 1986, Giurgiu)

IV.50. Patru fraţi, Mircea, Ionel, Mihai şi Horia au o sumă de bani. Mihai are de patru ori mai puţin decît Ionel, Ionel de două ori mai mult decît Mircea, Mircea de trei ori mai puţin decît Horia. Aflaţi suma totală de bani ştiind că Ionel are 660 lei.

(Etapa locală, 1985, Braşov)

IV.51. Trei muncitori au primit pentru confecţionarea unui număr de scaune pentru mobilă de sufragerie 6 200 lei. Ştiind că primul muncitor a confecţionat 22 de scaune, al doilea cu 6 scaune mai puţin, iar al treilea cu 8 scaune mai mult decît al doilea, aflaţi :

a) numărul de scaune confecţionate de fiecare muncitor ;

b) cît s-a plătit pentru confecţionarea unui scaun ;

c) cît a primit fiecare muncitor pentru munca depusă.

(Etapa locală, 1986, Bihor)

IV.52. De la o seră de flori s-au trimis spre vînzare 286 trandafiri, tot atîtea garoafe, iar lalele cu 89 mai puţine decît trandafiri şi garoafe la un loc. O floare de lalea costă 2 lei, o garoafă costă cît două lalele, iar un trandafir cît o lalea şi o garoafă la un loc.

Cîţi lei a încasat sera pentru florile trimise spre vînzare ?

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

IV.53. La o crescătorie de animale se consumă zilnic 45 028 l de apă pentru adăpatul animalelor. Unei vaci i se dau 50 l de apă, unui cal cu 10 l mai mult decît unei vaci, iar unei oi 8 l. În crescătorie sînt 250 de vaci şi 48 cai. Cîte oi sînt ?

(Etapa locală, 1986, Galaţi)

IV.54. Într-un oraş sînt 65 000 de locuitori, în altul 40 000. Populaţia primului oraş creşte în fiecare an cu 4 000 de locuitori, iar populaţia din oraşul al doilea cu 6 500. Peste cîţi ani populaţiile ambelor oraşe devin egale ?

(Etapa locală, 1986, Cluj)

IV.55. Pentru o şcoală cu clasele I—VIII şi un liceu s-au trimis 34 catedre şi 603 bănci, costînd în total 265 860 lei. Ce valoare are mobilierul trimis fiecărei unităţi şcolare, dacă liceul a primit 15 catedre şi 236 de bănci, o catedră avînd preţul de 1 080 lei ?

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

IV.56. Un S.M.A. a primit pentru apropiata campanie agricolă de primăvară o dată 1 860 litri de motorină şi altă dată 1 680 litri, de fiecare dată în butoaie de aceeaşi capacitate. Aflaţi cîte butoaie a primit staţiunea de fiecare dată, cît şi în total, dacă în primul transport au fost cu trei butoaie mai mult decît în al doilea.

(Etapa judeţeană, 1986, Braşov)

IV.57. Aflaţi numerele naturale mai mici decît 40 care la împărţirea prin 3 şi 4 dau restul 2.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

IV.58. Aflaţi toate numerele naturale care împărţite la 4 dau cîtul 102 şi resturi diferite.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

IV.59. Un număr natural este de trei ori mai mare decît alt număr. Care sînt cele două numere ştiind că cel mai mare, este mai mare decît 14 şi mai mic decît 20 ?

*(Etapa municipală, 1986, **Bucureşti**)*

IV.60. O gospodină a cumpărat cîteva pahare mari de cristal cu 95 lei bucata şi tot atîtea pahare mici cu 73 lei bucata. Pentru paharele mari a plătit cu 374 lei mai mult decît pentru paharele mici. Cît au costat toate paharele cumpărate ?

(Etapa locală, 1986, Galaţi)

IV.1.3 **Probleme care se rezolvă prin metoda figurativă**

IV.61. Într-o clasă sînt de două ori mai multe fete decît băieţi. Pot fi în clasă 32 elevi ? Dar 36 elevi ? Cum trebuie să fie numărul de elevi pentru a îndeplini condiţiile problemei ?

(G.M. 1/1985, Etapa locală, 1986, Giurgiu)

IV.62. Aflaţi două numere a căror sumă este 35 şi unul din ele este cu 2 mai mare decît dublul celuilalt.

(Etapa locală, 1986, Botoşani)

IV.63. Aflaţi cel mai mare număr natural par, de patru cifre, ştiind că suma dintre cifra sutelor şi cifra zecilor este 12 şi diferenţa aceloraşi cifre este 2.

(Etapa locală, 1985, Bucureşti)

IV.64. La un magazin de produse lactate s-au adus prima dată 70 dal lapte, a doua oară 850 litri lapte, iar a treia oară diferenţa dintre cantităţile aduse înainte. Întreaga cantitate s-a vîndut în două zile. Aflaţi cîţi litri de lapte s-au vîndut în fiecare zi, dacă în prima zi s-a vîndut o cantitate de patru ori mai mare decît în a doua.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

IV.65. Doi fraţi au împreună acum, 41 ani. Cînd primul avea 11 ani, al doilea avea şase ani. Cîţi ani are fiecare acum ?

(Etapa locală, 1985, Călăraşi)

IV.66. O carte este deschisă la întîmplare. Stabiliţi numerele celor două pagini pe care le privim dacă suma acestor numere este 149.

(Etapa locală, 1985, Alba)

IV.67. De la un depozit se aprovizionează cu făină două magazine alimentare. În primul magazin s-au adus odată de şase ori mai multă făină ca la al doilea.

Dacă se vînd 2 000 kg făină de la primul magazin şi se mai aduc 520 kg la al doilea, atunci cantităţile de făină din cele două magazine devin egale. Cîtă făină a fost adusă la început în fiecare magazin ?

(G.M. 7/1985, Etapa locală, 1986, Bihor)

IV.68. Două echipe de muncitori au realizat 1 500 piese. Prima echipă a realizat de trei ori mai mult şi încă 60 de piese faţă de a doua.

a) Cîte piese a realizat fiecare echipă ?

b) Cîţi muncitori are fiecare echipă ştiind că fiecare muncitor a realizat cîte 30 de piese ?

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

IV.69. Aflaţi cinci numere ştiind că primul este de două ori mai mare decît al doilea, al doilea este cu 25 mai mare decît al treilea, al treilea este cu 40 mai mic decît al patrulea, al patrulea este de trei ori mai mare decît al cincilea, iar suma dintre al patrulea şi al cincilea este 1 000.

(Etapa judeţeană, 1986, Bihor)

IV.70. Găsiţi numerele a, b, c, d, e care îndeplinesc simultan condiţiile :

c) a este de patru ori mai mare decît b ;

2) b este cu 25 mai mare decît c ;

3) c este cu 75 mai mic decît d ;

4) d este de trei ori mai mare decît e ;

5) suma dintre d şi e este 500.

(Etapa judeţeană, 1986, Caraş-Severin)

IV.71. Dintr-o ţeavă cu lungimea de 185 cm s-au tăiat două bucăţi de aceeaşi lungime, mai mari şi trei bucăţi mai mici, de aceeaşi lungime şi acestea, şi au mai rămas 17 cm.

Fiecare din bucăţile mari este de două ori mai lungă decît fiecare din cele mici. Ce lungime are fiecare bucată ?

(Etapa locală, 1985, Hunedoara)

IV.72. Suma a două numere naturale este 240. Aflaţi numerele în cazul cînd cîtul împărţirii celui mai mare la cel mai mic este 4 iar restul 20.

(Etapa judeţeană, 1986, Prahova)

IV.73. Cîtul împărţirii a două numere este 3, iar restul este 10. Dacă adunăm deîmpărţitul, împărţitorul, cîtul şi restul obţinem 143. Care sînt numerele ?

(Etapa locală, 1986, Prahova)

IV.74. Ionel are cu 143 lei mai mult decît Mihai. Dacă suma lui Ionel s-ar împărţi la suma lui Mihai, cîtul ar fi 2, iar restul 56 lei. Cîţi lei are fiecare ?

(Etapa locală, 1986, Cluj)

IV.75. Aflaţi două numere în următoarele condiţii : dacă la primul adaug 72, suma obţinută este egală cu al doilea număr ; dacă la al doilea număr adaug 184, suma obţinută va fi de trei ori mai mare decît primul.

(Etapa judeţeană, 1986, Cluj)

IV.76. Unor zidari şi unor dulgheri li s-au plătit 31 900 lei. Primii au primit cîte 500 lei, ceilalţi au primit cîte 600 lei. Toţi dulgherii, împreună, au primit cu 3 100 lei mai puţin decît zidarii. Cîţi zidari şi cîţi dulgheri au fost ?

(Etapa judeţeană, 1986, Cluj)

IV.77. Pe trei rafturi ale unei biblioteci sînt aşezate 458 cărţi. Pe raftul al doilea sînt cu 50 de cărţi mai puţine decît pe primul şi de două ori mai puţine decît pe al treilea raft. Cîte cărţi se află pe fiecare raft ?

(Etapa locală, 1985, Alba)

IV.78. Aflaţi suma a trei numere diferite de zero, ştiind că diferenţa dintre primul şi al doilea este aceeaşi cu diferenţa dintre al doilea şi al treilea, iar numărul al doilea este 7.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

IV.79. În trei lăzi sînt, împreună, 614 kg de marfă. În a doua ladă este de două ori mai multă marfă decît în prima şi cu 4 kg mai puţină decît în a treia. Cîte kilograme de marfă sînt în fiecare ladă ?

(Etapa locală, 1986, Mureş)

IV.80. Suma a trei numere este 1 229. Al doilea număr este de două ori mai mare decît primul şi cu 14 mai mic decît al treilea. Aflaţi cele trei numere.

(Etapa locală, 1986, Galaţi)

IV.81. Suma a trei numere este 717. Al doilea este de trei ori mai mare decît primul şi cu 17 mai mic decît al treilea. Aflaţi cele trei numere.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

IV.82. Trei copii au cheltuit împreună 102 lei. Primul a cheltuit cu 12 lei mai puţin decît al doilea, iar al doilea cu 24 de lei mai mult decît al treilea. Cîţi lei a cheltuit fiecare copil ?

(Etapa locală, 1986, Covasna)

IV.83. Trei detaşamente de pionieri au recoltat împreună 320 kg plante medicinale. Primul a recoltat cu 20 kg mai puţin decît al doilea, iar al treilea cît al doilea şi încă 10 kg. Aflaţi :

a) cîte kilograme de plante medicinale a recoltat fiecare detaşament ;

b) cu cît a contribuit fiecare detaşament la realizarea angajamentului economic, dacă un kilogram de plante medicinale s-a plătit cu 15 lei.

(Etapa locală, 1985, Iaşi)

IV.84. Suma a patru numere este egală cu 138. Aflați numerele știind că primul număr este egal cu suma celui de al doilea și al treilea, al doilea este de două ori mai mic decît al treilea, iar al patrulea, este numărul 30.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

IV.85. Andrei, Ana și Ada au strîns, împreună, 28 kg de maculatură. Ada a strîns de două ori mai mult decît Andrei, iar Ana a strîns de două ori mai mult decît Ada. Cîte kilograme de maculatură a strîns fiecare ?

(Etapa locală, 1986, Bacău)

IV.86. Suma a trei numere este 45. Aflați numerele știind că primul număr este de trei ori mai mare decît al treilea, iar al doilea este de două ori mai mic decît al treilea.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.87. Suma a trei numere este de 1 240. Știind că suma primelor două este 938, iar suma ultimelor două este 720, aflați cele trei numere prin efectuarea a numai trei operații matematice.

(Etapa locală, 1985, Caraș-Severin)

IV.88. Trei copii au împreună 200 de lei. Primii doi au împreună 110 lei, ultimii doi 190 lei. Cîți lei are fiecare ?

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

IV.89. O cooperativă agricolă a transportat cele 9 000 kg de grîu în trei camioane. Ce cantitate de grîu a fost în fiecare camion dacă în primul și în al treilea au fost 6 000 kg, iar în primul și al doilea 5 000 kg ?

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

IV.90. În trei saci erau 207 kg cartofi. După ce din fiecare sac s-a vîndut aceeași cantitate de cartofi, în primul sac au rămas 26 kg, în al doilea 35 kg și în al treilea 38 kg. Cîte kilograme de cartofi au fost la început în fiecare sac ?

(Etapa locală, 1986, Bacău)

IV.91. Suma a trei numere este 2 450. Primul număr este cu 250 mai mare decît al doilea și cu 180 mai mare decît al treilea. Aflați cele trei numere.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

IV.92. Un elev a citit vineri, sîmbătă și duminică o carte. Duminică a citit cu 100 pagini mai mult decît vineri și sîmbătă la un loc. El constată că duminică a citit de patru ori mai mult și încă 10 pagini decît în primele două zile. Cîte pagini a citit în fiecare zi dacă vineri a citit de două ori mai mult decît sîmbătă ?

(G.M. 12/1984 ; Etapa județeană, Bihor)

IV.93. Într-o pășune sînt mînji, viței și miei. Un elev întreabă :

— Sînt, 100 de animale ?

— Nu, răspunde paznicul. Ca să fie 100, ar mai trebui 4. Sînt o parte mînji, de trei ori mai mulți viței și de două ori mai mulți miei decît mînji și viței la un loc.

Aflați numărul mînjilor, vițeilor și al mieilor.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

IV.94. Suma a trei numere naturale consecutive a, b, c este 1 209. Aflați cele trei numere.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

IV.95. Suma a trei numere a, b, c este de șase ori mai mare decît a și de trei ori mai mare decît b.

a) De cîte ori este mai mare această sumă decît c ?

b) Aflați numerele a și c dacă $b = 108$.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

IV.96. Trei persoane au încasat împreună pentru munca depusă 520 lei. A doua persoană a încasat de trei ori cît prima și încă 8 lei. A treia persoană a încasat de patru ori cît primele două la un loc. Ce sumă a încasat fiecare persoană ?

(Etapa județeană, 1985, Caraș-Severin)

IV.97. Să se determine un număr de patru cifre știind că sînt îndeplinite următoarele condiții, simultan : suma cifrelor numărului este 20 și fiecare cifră este cu 2 mai mare decît cea anterioară.

(G.M. 8/1985 ; Etapa județeană, 1986, Giurgiu ; Etapa locală, 1986, Mureș, Iași)

IV.98. În patru silozuri se află 10 345 tone de furaje. Aflați cîte tone de furaje sînt în fiecare siloz dacă în al doilea avem de două ori mai puțin decît în primul, în al patrulea cu 280 t mai puțin decît în al doilea și în al doilea cu 150 t mai mult decît în al treilea.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

IV.99. Aflați numerele A, B, C, D, E care îndeplinesc următoarele condiții simultan :

a) A este de două ori mai mare decît B ;

b) B este cu 25 mai mare decît C ;

c) C este cu 40 mai mic decît D ;

d) D este de trei ori mai mare decît E ;

e) $B + C + D + E = 815$.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

IV.1.4 Probleme care se rezolvă prin metoda comparației

IV.100. Dacă Ionel ar cumpăra două caiete de matematică și două de desen ar plăti 12 lei, iar dacă ar cumpăra două caiete de matematică și trei caiete de desen ar plăti cu un leu mai mult.

a) Cîți lei costă un caiet din fiecare fel?
b) Cîte caiete poate cumpăra el cu cei 6 lei pe care îi are?

(Etapa locală, 1986, Caraş-Severin)

IV.101. 17 saci cu făină şi 26 saci cu cartofi cîntăresc 2 764 kg. 35 saci cu cartofi şi 17 saci cu făină cîntăresc 3 250 kg. Cît cîntăreşte un sac cu cartofi şi cît un sac cu făină?

(Etapa locală, 1985, Suceava)

IV.102. 17 saci cu făină şi 12 saci cu cartofi cîntăresc 1 210 kg, iar 21 saci cu făină şi 12 saci cu cartofi cîntăresc 1 410 kg.
a) Cîte kilograme are un sac de făină?
b) Dar un sac în care sînt cartofi?

(Etapa judeţeană, 1986, Gorj)

IV.103. 16 saci cu făină şi 15 saci cu cartofi cîntăresc 2 030 kg, iar 22 saci de făină şi 15 saci de cartofi cîntăresc 2 510 kg. Cît cîntăreşte un sac cu făină şi cît cîntăreşte un sac cu cartofi?

(Etapa judeţeană, 1986, Braşov)

IV.104. Într-o zi 12 băieţi şi 6 fete din clasa a IV-a au cules 150 kg cireşe. A doua zi, 24 băieţi şi 13 fete au cules 305 kg cireşe. Cîte kilograme de cireşe culege, în medie, o fată pe zi şi cîte un băiat?

(Etapa judeţeană, 1986, Prahova)

IV.105. Pentru 4 m de pînză şi 15 m de stambă s-au plătit 530 de lei, iar pentru 3 m de pînză şi 10 m de stambă s-au plătit 360 de lei. Cît costă un metru de pînză şi cît costă un metru de stambă?

(Etapa judeţeană, 1986, Mureş)

IV.106. Pentru o bibliotecă s-au cumpărat 9 dulapuri, 16 mese şi 64 scaune. O masă un scaun şi un dulap costă 2 808 lei.

Ştiind că o masă costă cît trei scaune, iar un dulap costă cît trei mese, aflaţi valoarea mobilierului cumpărat.

(Etapa locală, 1985, Hunedoara)

IV.107. S-au cumpărat mere şi struguri, în total 70 kg, care au costat 420 lei. Cantitatea de mere este de patru ori mai mare decît cantitatea de struguri. Un kilogram de struguri a costat de două ori mai mult decît un kilogram de mere. Aflaţi preţul merelor şi al strugurilor.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

IV.1.5 Rezolvări de ecuaţii

În exerciţiile care urmează, găsiţi x, astfel încît:

IV.108. $(x \cdot 2 - 40) : 23 = 12$.

(Etapa locală, 1986, Caraş-Severin)

IV.109. $[(x - 416 : 4 + 2) \cdot 5 + 3] \cdot 2 = 1986$.

(Etapa judeţeană, 1986, Caraş-Severin)

IV.110. $(72 \cdot 4 - 32 \cdot 9) \cdot (1985 \cdot 1986 + 1987 \cdot 1988 - 1989 \cdot 1990) + \mathbf{x} = 2.$

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

IV.111. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \mathbf{x} \cdot 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 12.$

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

IV.112. $[(203 \cdot 4 - 207) : 5 + 240 \cdot 3 - (767 - 312 : 12)] \cdot \mathbf{x} = 1\,000.$

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

IV.113. $5 \cdot \mathbf{x} - (2\,000 : 50) - (1\,291 - 1\,091) = 40.$

(Etapa județeană, 1986, Brăila, Argeș)

IV.114. Aflați numerele naturale a, b, c astfel încît fiecare afirmație luată separat să fie adevărată :

a) $b \cdot 900 \cdot a \cdot 36 \cdot 7 = 0$;
b) $a \cdot b - 0 \cdot c - 6 = 0$;
c) $(a - b) \cdot c = 0.$

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

IV.115. $\mathbf{x} \cdot [210 : 15 \cdot (20 \cdot 20 - 30 \cdot 10)] = 5\,600.$

(Etapa locală, 1985, Suceava)

IV.116. $[(\mathbf{x} - 1) : 100 + 90] : 10 - 10 = 0.$

(Etapa locală, 1985, Iași)

IV.117. $1\,225 : [(13 \cdot \mathbf{x} - 30) : 3 - 10] = 7.$

(Etapa județeană, 1986, Bihor)

IV.118. $(123 \cdot \mathbf{x} - 1\,278) : 149 = 36.$

(Etapa locală, 1986, Cluj)

IV.119. $\{[(7 - 3) \cdot 5 - 2 + 3] : 7 + 9\} : \mathbf{x} = 4.$

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

IV.120. $[(\mathbf{x} + 270 : 3) \cdot 5 + 100] : 600 = 1.$

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.121. $[(286 + \mathbf{x}) - 387 : 9] : 3 = 2\,185 - 1\,879.$

(Etapa locală, 1985, Argeș)

IV.122. $10 \cdot \{\mathbf{x} - 10 \cdot [362 + 10 \cdot (24 + 24 : 4)]\} = 100.$

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

IV.123. $(285 - 81) : 102 + \mathbf{x} \cdot 900 - 1\,400 = 402.$

(Etapa județeană, 1985, Caraș-Severin)

CAPITOLUL II

FRACȚII. FRACȚII ZECIMALE

IV.2.1 **Fracții**

IV.124. La un magazin s-au adus 1 964 kg de mere care s-au vîndut în timp de trei zile, după cum urmează : în prima zi s-a vîndut un sfert din toată cantitatea ; în ziua a doua cu 148 kg mai mult decît în prima zi, iar în a treia zi s-a vîndut restul.

Ce sumă s-a încasat zilnic, dacă un kilogram de mere costă 6 lei ?

(Etapa locală, 1985, București)

IV.125. Suma a patru numere este 1 100. Al doilea număr este un sfert din al patrulea. Primul este de două ori mai mare decît al doilea și cît jumătate din al treilea. Aflați numerele.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.126. Într-o drumeție cei 36 elevi ai unei clase au fost așezați în coloană cîte unul. Pionierul comandant constată că numărul elevilor din fața sa este egal cu un sfert din numărul elevilor din urma sa. Al cîtelea din șir se află pionierul comandant ?

IV.127. Cu un sfert din banii pe care îi are, un elev a cumpărat un stilou de 50 de lei, iar cu o cincime din cîți i-au mai rămas a cumpărat două cărți. Cîți lei a avut inițial și cîți lei i-au mai rămas după cumpărături ?

IV.128. Într-o clasă sînt 30 de băieți și de fete. Cîți băieți și cîte fete sînt, știind că, dacă ar fi cu doi băieți mai puțin, atunci jumătate din numărul lor ar reprezenta de două ori mai mult decît o treime din numărul fetelor ?

(Etapa județeană, 1986, Iași)

IV.129. O muncitoare a plecat să-și facă cumpărături cu o anumită sumă de bani. Ea cumpără cu jumătate din sumă un palton și cu un sfert din suma rămasă o rochie. Aflați suma cu care a plecat la cumpărături dacă după efectuarea acestora a rămas cu 675 lei.

(Etapa municipală, 1986, București)

IV.130. Aflați suma $a+b+c+d$ știind că $a=2\ 568$, b este $\frac{1}{6}$ din a, c este $\frac{3}{4}$ din b și că d este $\frac{5}{7}$ din $b+c$.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

IV.131. La un depozit trebuia să se trimită 18 540 tone de cărbune. În prima zi s-au trimis $\frac{2}{9}$ din întreaga cantitate, a doua zi $\frac{3}{5}$ din ce a rămas, iar a treia zi restul. Cîte tone de cărbuni s-au trimis în fiecare zi ?

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

IV.132. Dintr-o sumă de bani, un elev cheltuiește $\frac{1}{3}$ pentru cărți, $\frac{3}{8}$ din rest pentru o cutie de creioane, iar $\frac{1}{4}$ din noul rest pentru caiete. I-a mai rămas 45 lei. Cîți lei a avut ?

(Etapa locală, 1985, Prahova)

IV.133. Ce sumă a a avut un elev dacă după ce a cheltuit $\frac{3}{7}$ din ea, a mai cheltuit $\frac{3}{5}$ din cît îi rămăsese, iar după ce a mai cheltuit încă 16 lei a constatat că i-au mai rămas 24 lei ?

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

IV.134. Petrică are de cinci ori mai mulți lei decît Costică. Cîți lei are fiecare din ei știind că, dacă Petrică îi dă lui Costică 120 lei, atunci suma de bani a acestuia reprezintă jumătate din suma lui Petrică ?

(Etapa locală, 1986, Iași)

IV.135. Aflați numărul x, știind că dacă $\frac{3}{4}$ din 2 640 se adună cu două jumătăți din 20, iar suma obținută se împarte la x, se obține numărul 500.

(Etapa locală, 1985, Argeș)

IV.136. Pionierii unei școli au plantat 4 800 pomi fructiferi. Din întregul număr de pomi, $\frac{2}{5}$ au fost meri, $\frac{3}{8}$ peri, $\frac{1}{6}$ caiși iar restul pruni. Cîți pruni s-au plantat ?

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.137. Într-o librărie s-au vîndut 240 cărți. Din acestea 40 au fost cărți de știință, $\frac{2}{5}$ din rest cărți de povești, iar restul cărți de colorat. Ce valoare au cărțile vîndute, dacă fiecare carte științifică costă 20 lei, cea de povești costa cu 5 lei mai mult, iar cea de colorat de 5 ori mai puțin decît valoarea unei cărți de știință și a unei cărți de povești la un loc ?

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

IV.138. Într-o fermă sînt 920 pui și găini. Diferența dintre numărul puilor și al găinilor este 690. Cîți lei se încasează dacă se vînd $\frac{1}{5}$ din numărul puilor și $\frac{3}{5}$ din numărul găinilor, cunoscînd că o găină și un pui costă 90 lei și că o găină costa cu 30 lei mai mult decît un pui ?

(Etapa locală, 1985, Bistrița-Năsăud, Brăila)

IV.139. Într-o excursie Ioana cheltuieşte $\frac{3}{4}$ din economia ei, ceea ce reprezintă 24 lei. Cîţi lei avea Ioana ?

(Etapa locală, 1985, Dolj)

IV.140. O uzină realizează în luna ianuarie $\frac{4}{9}$ din numărul pieselor planificate, în luna februarie realizează $\frac{2}{9}$ din numărul pieselor planificate, iar în luna martie restul pieselor de 9 000 bucăţi.

La această producţie contribuie trei echipe de muncitori. Prima echipă are 24 de muncitori, a doua echipă are jumătate din numărul muncitorilor primei echipe, iar echipa a treia are un sfert din numărul primelor două împreună.

a) Care a fost numărul de piese planificate ?

b) Cîte piese a realizat fiecare echipă ?

(Etapa locală, 1985, Constanţa)

IV.141. Calculaţi :

$$\frac{\frac{3}{5}+\frac{8}{5}-\frac{6}{5}}{7}+\frac{\frac{18}{8}-\frac{2}{8}}{7}+\frac{4}{7}$$

(Etapa locală, 1985, Bistriţa-Năsăud)

IV.142. Calculaţi :

$$\left(\frac{3}{11}+\frac{9}{11}-\frac{5}{11}+1-\frac{7}{11}\right)\times\left(\frac{15}{17}+4-\frac{8}{17}-3-\frac{7}{17}\right)$$

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.2.2 Fraţii zecimale

IV.143. Aflaţi **x**, astfel încît :

a) $47{,}8+x=800$;

b) $x-28{,}5=9{,}78$.

(Etapa locală, 1985, Călăraşi)

IV.144. Suma a trei numere este 16 336,75.

Dacă adunăm primul cu al doilea număr obţinem 10 702,50, iar dacă adunăm al doilea cu al treilea număr obţinem 6 712,25. Care sînt cele trei numere ?

(Etapa locală, 1985, Neamţ)

CAPITOLUL III

PROBLEME CU UNITĂȚI DE MĂSURĂ

IV.145. Într-un bazin curge apă prin trei robinete. Primul robinet dă 600 dl pe oră, al doilea 2 l pe minut, al treilea 400 cl pe minut. Cîți hl de apă se vor găsi în bazin după 10 ore, dacă printr-un alt robinet se scurg spre o grădină de zarzavat 18 dal pe oră ?

(Etapa locală, 1985, Neamț)

IV.146. Într-un bazin curge apa, în același timp, prin două robinete cu debitele de 5 hl pe oră și respectiv 7 hl pe oră. În același timp din bazin se scurge apă printr-o țeavă cu un debit de 600 l pe oră. În cît timp se umple bazinul dacă are o capacitate de 4 800 l ?

(Etapa locală, 1986, Alba)

IV.147. Dintr-un oraș a pornit la ora 9 dimineața un avion, zburînd cu o viteză medie de 428 km pe oră. După o oră a pornit din același oraș și pe aceeași direcție un alt avion, care făcea în medie 535 km pe oră. La ce oră îl va ajunge al doilea avion pe primul și la ce distanță de oraș ?

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

IV.148. Pe o șosea sînt localitățile A, B și C (B între A și C). Suma distanțelor de la orașul B la orașele A și C este de 282 km, iar distanța de la B la C este cu 88 km mai mică decît distanța de la B la A. Aflați distanțele de la B la A și de la B la C.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

IV.149. Trei orașe A, B, C sînt situate pe o șosea B aflîndu-se între A și C. Ce lungime are șoseaua dintre A și B și ce lungime are cea dintre A și C, știind că suma distanțelor de la B la A și de la B la C este de 282 km, iar distanța de la orașul B la orașul C este cu 16 000 m mai mică decît cea de la B la A ?

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

IV.150. Trei orașe A, B, C, sînt situate pe o șosea.

a) Ce lungime are șoseaua de la A la B și de la B la C, știind că suma distanțelor de la B la orașele A și C (B aflîndu-se între ele) este de 390 km, iar distanța de la B la C este cu 76 km mai mică decît distanța de la orașul B la A ?

b) În cîte ore parcurge întreaga distanță un autoturism care are o viteză medie de 65 km pe oră ?

c) La ce distanță de orașul B se va afla autoturismul după 3 ore de mers ?

(Etapa locală, 1985, Brașov)

IV.151. Distanța dintre două porturi, așezate pe o apă curgătoare este de 280 km. Un vapor parcurge această distanță, mergînd în sensul curentului apei, în 7 ore. În cît timp parcurge aceeași distanță la întoarcere, mergînd în sens opus curentului apei, știind că în această situație face cu 5 km pe oră mai puțin ?

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

CAPITOLUL IV

ELEMENTE DE GEOMETRIE

IV.152. În figură, ABCD este un pătrat, M, N, P, Q sînt mijloacele laturilor sale, iar O este centrul său. Cîte pătrate și cîte triunghiuri sînt puse în evidență ?

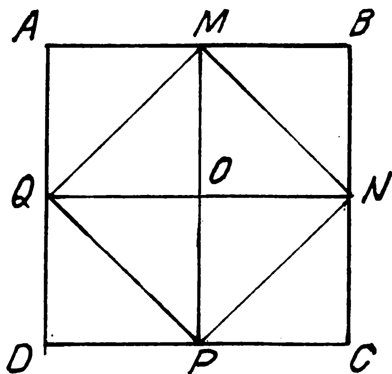


Fig. IV.152.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

IV.153. O grădină cu perimetrul de 304 dam se împrejmuiește cu un gard. Un sfert din lungimea gardului este gard viu, iar cu 20 m mai puțin decît jumătate din gard, este gard din scînduri. Restul din gard este format din trei rînduri de sîrmă. Cîți metri de sîrmă s-au folosit dacă s-a lăsat o poartă de 4 m ?

IV.154. Un teren în formă de dreptunghi are perimetrul de 4 800 m. Lungimea lui este de trei ori mai mare decît lăţimea. Aflaţi dimensiunile dreptunghiului.

(Etapa locală, 1985, Dolj)

IV.155. Un teren în formă de dreptunghi cu perimetrul de 40 dam şi lungimea de trei ori mai mare decît lăţimea a fost împrejmuit cu prefabricate pe cele „două lungimi", iar pe „lăţimi" cu gard viu. Pe acest teren s-au plantat 2 500 meri şi cireşi. Diferenţa dintre numărul merilor şi numărul cireşilor este de 630. Aflaţi :

a) Cîţi metri liniari de prefabricate şi cîţi de gard viu s-au folosit ;

b) Numărul merilor şi al cireşilor plantaţi.

(Etapa judeţeană, 1986, Gorj)

IV.156. Perimetrul unui pătrat este un număr egal cu lungimea laturii unui alt pătrat. Aflaţi lungimea fiecărei laturi a celor două pătrate ştiind că suma lor este de 25 m.

(Etapa judeţeană, 1986, Giurgiu)

IV.157. a) Cu cît trebuie să se mărească lungimea unui dreptunghi care are perimetrul de 750 cm şi lăţimea de 75 cm ca să se obţină un alt dreptunghi cu perimetrul de 1 000 cm ?

b) Care va fi aria pătratului cu perimetrul de 1 000 cm ?

(Etapa locală, 1986, Brăila)

CAPITOLUL V

DIVERSE

IV.158. Două volume ale unei cărţi sînt aşezate în bibliotecă unul lîngă altul. Cîte pagini sînt între prima pagină a primului volum şi pagina care arată jumătate din numărul de pagini al celui de-al doilea, ştiind că volumul I are 366 de pagini, iar al doilea 302 pagini ?

(Etapa locală, 1986, Alba)

IV.159. a) De cîte ori se folosesc cifrele arabe pentru a numerota o carte cu 100 de pagini, începînd cu pagina 1 ?

b) Ştiind că pentru numerotarea paginilor unei cărţi au fost folosite 315 cifre, aflaţi cîte pagini are cartea.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

IV.160. Stabiliţi care propoziţie este adevărată :

a) $x \cdot (302 - 25 \cdot 12) = 30$ pentru $x = 15$;

b) $6 \cdot x + 101 - 100 : 4 = 686$ pentru $x = 100$.

(Etapa judeţeană, 1986, Covasna)

IV.161. Aflaţi toate perechile de numere naturale a, b pentru care : $a + 3 \cdot b = 11$.

(Etapa locală, 1986, Caraş-Severin)

IV.162. Se dau numerele :

$a = (9\,046 - 1\,096) : 75 + 14\,085 - 24\,456 : 8$;
$b = 6 \cdot 5 \cdot 0 + 50 + 5 \cdot 10 + 0 : 7$.

Calculaţi cîtul numerelor a şi b.

(Etapa locală, 1985, Călăraşi)

IV.163. Completaţi tabelul :

a	15	17	0			7
b	10	0	9	0	1	
$a + b + (a \cdot b)$				66	9	23

(Etapa judeţeană, 1986, Braşov)

IV.164. Completaţi cerculeţele cu numere naturale corespunzătoare astfel încît suma numerelor din oricare trei cerculeţe „vecine" să fie 10.

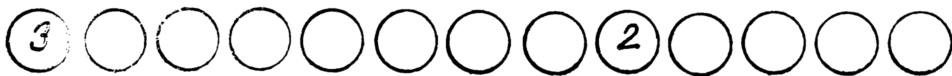


Fig. IV.164.

(Etapa judeţeană, 1986, Sibiu)

IV.165. Fiecare dintre cei 80 elevi din două clase paralele ştiu cel puţin una din limbile franceză şi engleză. 41 de elevi ştiu limba franceză, iar 60 elevi ştiu limba engleză. Cîţi dintre elevi ştiu numai limba engleză şi cîţi dintre ei ştiu numai limba franceză ? Cîţi elevi ştiu ambele limbi ?

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

IV.166. Într-o clasă sînt 30 elevi. 18 învaţă limba franceză, iar 21 limba engleză. Fiecare elev al clasei învaţă engleza sau franceza.

a) Cîţi elevi învaţă franceza şi engleza ?
b) Cîţi elevi învaţă numai una din cele două limbi ?

(Etapa locală, 1985, Prahova)

IV.167. Cinci platforme pentru extracţie de ţiţei pe mare, au în total ca lungime un număr natural format din trei cifre, astfel încît numărul de la cifra sutelor este fără soţ (impar), mai mare decît numărul de la cifra unităţilor, iar cel de la cifra zecilor este de două ori mai mare decît cel de la cifra sutelor şi în sfîrşit numărul format cu ultimele două cifre se împarte (exact) la 6. Lăţimea unei platforme este cu 10 m mai mică ca jumătate din lungimea ei. Fiecare platformă este sprijinită de 4 picioare, fiecare picior avînd lungimea cu 4 m mai mare decît semiperimetrul platformei. Se cer :

a) lungimea și lățimea unei platforme ;

b) lungimea unui picior al unei platforme ;

c) cît cîntăresc picioarele celor 5 platforme, dacă unul cîntărește 300 t ;

d) lungimea (în kilometri) a conductei care va transporta țițeiul știind că este reprezentată printr-un număr natural care se împarte exact la 6, avînd două cifre, ambele pare, numărul la cifra zecilor este cu 4 mai mare decît cel de la cifra unităților.

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

IV.168. Avem trei vase în care încap 8 l, 5 l și 3 l. Primul este plin cu apă, iar celelalte sînt goale. Cum se poate măsura un litru de apă, folosind cele trei vase ?

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

IV.169. La un magazin de legume și fructe s-au vîndut într-o zi 210 kg de mere, de două calități, încasîndu-se 1 510 lei. Știind că merele din prima calitate s-au vîndut cu 8 lei kilogramul, iar din calitatea a doua cu 6 lei kilogramul, calculați cîte kilograme de mere din fiecare calitate au fost vîndute în acea zi.

IV.170. Pentru ce numere naturale x este adevărată afirmația :

$$x < 12 \cdot 35 - 30 \cdot 13 ?$$

(Etapa locală, 1986, Bacău)

IV.171. Determinați numărul natural $A = \overline{xyot}$ știind că sînt îndeplinite simultan toate condițiile următoare :

a) suma cifrelor numărului A este egală sau mai mică decît 15 ;

b) x este mai mic ca y și y este mai mic ca t ;

c) x, y și t „cresc" din doi în doi.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

INDICAȚII

IV.1. Depinde cîte cifre se repetă.

IV.2. Cel mai mare număr natural de cinci cifre diferite este 98 765.

IV.3. Numărul trebuie să fie de forma $\overline{20\,xyz}$.

IV.4. Este suficient să găsiți unul ; schimbați apoi cifrele între ele.

IV.5. Dacă se adună orice număr cu numărul zero, numărul respectiv nu se modifică.

Dacă se înmulțește orice număr cu numărul zero, rezultatul este numărul zero.

Dacă se împarte orice număr la numărul unu, rezultatul este acel număr.

IV.6. Atenţie la înmulţirea cu zero.

IV.7. a) Prima operaţie : împărţirea ;
b) Prima operaţie, în paranteză, este înmulţirea.

IV.9. Atenţie la înmulţirea cu zero.

IV.26. Dacă unul din factorii unei înmulţiri este zero, atunci rezultatul este zero.

IV.32. $10^2 = 10 \cdot 10$.

IV.33. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$.

IV.34. Ne amintim că, de exemplu, numărul 7 283 se mai scrie $7\,000 + 200 + 80 + 3$; sau $7 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3$; sau $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3$.

IV.35. Este de preferat să se calculeze întîi numerele *a*, *b* şi *c*.

IV.39. Parantezele nu trebuie să conţină scăderea.

IV.40. Se găsesc întîi numerele.

IV.41. Găsiţi mai întîi numerele *a* şi *b*.

IV.42. Unul din numere este 111.

IV.43. Porniţi de la cifra unităţilor folosind proba adunării prin scădere.

IV.44. Observaţi la tabla înmulţirii cu 6, ce rezultat se termină în cifra 4.

IV.45. Problema se poate formula astfel : reconstituiţi adunarea :

$$\begin{array}{r} 1a5b+ \\ 41c7 \\ \hline 6d86 \end{array}$$

IV.46. a) Începeţi în ambele cazuri cu cifra unităţilor de la al doilea număr.
b) Observaţi că primul produs parţial are numai trei cifre.

IV.47. Numerele sînt 10 000 ; 9 977 ; 10 033.

IV.49. Alegeţi din „tabla înmulţirii“ cu 7, cu produsele de două cifre, cerinţele problemei.

IV.50. Traduceţi în operaţii afirmaţiile : „de patru ori mai puţin decît“, „de două ori mai mult decît“ etc.

IV.52. Aflaţi întîi numărul de flori din fiecare calitate şi apoi preţul fiecăreia.

IV.53. Calculaţi cîţi litri de apă consumă caii şi vacile la un loc.

IV.54. Calculaţi diferenţele dintre populaţii şi dintre creşterile celor două populaţii.

IV.55. Aflaţi preţul unei bănci.

IV.56. Observaţi la ce se poate folosi diferenţa dintre cantităţile aduse la cele două transporturi.

IV.57. Găsiţi numerele ce se împart exact la 3 şi la 4, mai mici ca 40.

IV.58. Cum trebuie să fie restul faţă de împărţitor ?

IV.59. Primul număr, cel mai mare, este tot număr natural care se împarte exact la 3.

IV.60. Diferenţa între cele două preţuri are legatură cu suma de 374 lei plătită mai mult pentru paharele mici.

IV.61. Ilustrăm în desen faptul că în clasă sînt de două ori mai multe fete decît băieţi, în felul următor :

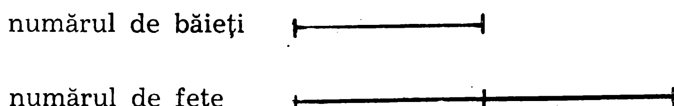


Fig. IV.61.

IV.62. Folosiţi un desen care să vă sugereze de ce se fac operaţiile (35 — 2) : 3.

IV.63. Pentru a găsi cifra sutelor şi cifra zecilor folosiţi metoda grafică. „Ştiind că diferenţa lor este 2" se mai traduce şi astfel : cifra sutelor este cu 2 mai mare ca cifra unităţilor.

IV.65. Aflaţi diferenţa între vîrstele lor, în trecut. Ea este aceeaşi şi în prezent. Se formulează o nouă problemă.

IV.67. Observaţi cît reprezintă 520 kg + 2 000 kg.

IV.68. a) Folosiţi metoda grafică, luînd ca unitate realizarea primei echipe.

IV.69. Din ultima parte a enunţului rezolvaţi următoarea problemă : al patrulea este de trei ori mai mare decît al cincilea, iar suma lor este 1 000.

IV.70. Problema este asemănătoare cu precedenta.

IV.71. Folosiţi metoda grafică, considerînd că sînt numai bucăţi mici. Cîte ?

IV.72. Problema se mai traduce astfel : suma a două numere naturale este 240. Aflaţi numerele ştiind că cel mare este de 4 ori mai mare decît cel mic şi încă 20.

IV.73. Să observăm că este vorba de două numere naturale ; unul din ele este de trei ori mai mare decît celălalt şi încă cu 10 mai mult.

IV.74. Se ţine cont că afirmaţia „cîtul este 2" înseamnă „de două ori mai mare".

IV.75. Folosiţi un desen şi veţi găsi că suma 72 + 184 reprezintă de un număr de ori primul număr.

IV.76. Aflaţi întîi sumele primite de toţi dulgherii şi apoi de toţi zidarii.

IV.79. Folosiţi următorul desen :

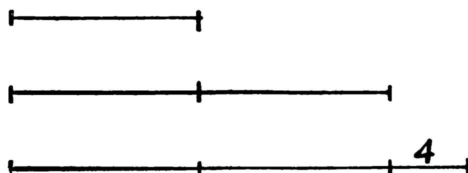


Fig. IV.79.

Observaţi ce se întîmplă dacă din 614 kg scădeţi 4 kg.

IV.80. Problema este asemănătoare cu precedenta.

IV.81. Observaţi ce se întîmplă dacă micşoraţi al treilea număr cu 17.

IV.82. Folosiţi un desen şi observaţi că diferenţa dintre sumele cheltuite de al treilea şi primul este aceeaşi cu diferenţa dintre sumele cheltuite de primul şi al doilea.

IV.85. Cantităţile strînse de Ada şi respectiv de Ana se pot exprima cu ajutorul cantităţii strînse de Andrei, care este cea mai mică.

IV.88. Problema este asemănătoare cu precedenta.

IV.89. Vezi problema precedentă.

IV.90. Sugerăm următorul desen :

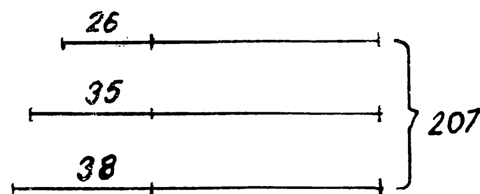


Fig. IV.90.

IV.91. Folosind desenul următor, calculaţi cu cît este mai mare al treilea număr decît al doilea.

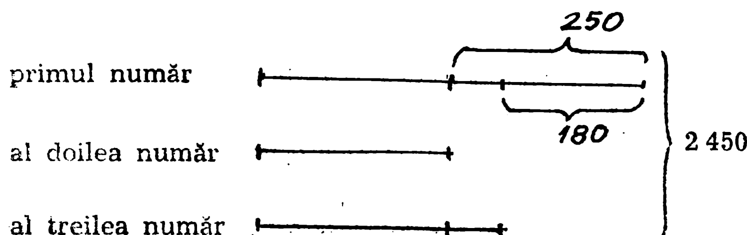


Fig. IV.91.

IV.93. Mînji, viței și miei la un loc, sînt : 100 — 4 = 96. **Folosiți metoda** figurativă.

IV.94. Numerele naturale consecutive diferă **între ele prin 1. Deci avem** problema : aflați trei numere naturale a, b, c **știind că** $a + b + c = 1\ 209$ **și că** b **este mai mare decît** a, **cu unu, iar** c **este mai mare cu unu ca** b.

IV.95. Prima afirmație se poate ilustra astfel :

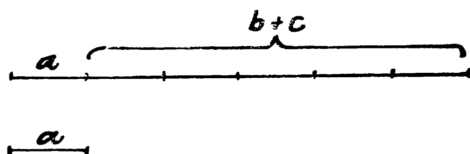


Fig. IV.95.a

A doua afirmație se poate figura astfel :

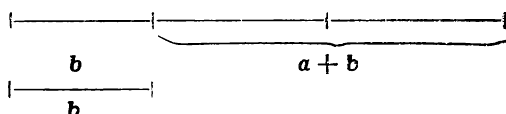


Fig. IV.95.b

Observați legătura dintre a și b.

IV.96. Figurați în desen situația cu privire **la primele două persoane** și apoi faceți calculele necesare.

IV.98. Folosiți următorul desen :

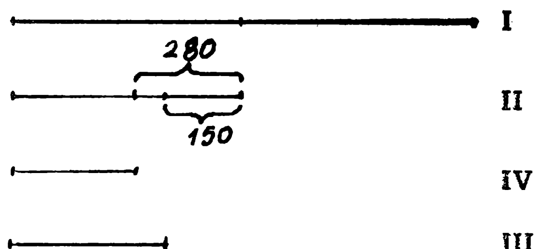


Fig. IV.98.

IV.99. Realizați un desen cu informații numai despre numerele B, C, D, E **a căror sumă este 815. „Completați" numerele** B **și** C **pînă puteți să folosiți numai numărul** E.

IV.103. Vezi problema precedentă.

IV.106. „Transformați" dulapurile și mesele în scaune.

IV.107. Folosiți metoda grafică pentru a afla cantitatea de mere și cea de struguri. „Transformați" strugurii în mere, pentru a afla întîi prețul merelor.

IV.110. Atenţie la înmulţirea cu zero.

IV.111. Se poate rezolva şi fără a face toate calculele.

IV.114. a), c) La o înmulţire se poate obţine ca rezultat numărul zero, cînd cel puţin unul din factori este zero.

b) Dacă unul din factori este zero, atunci produsul este zero.

IV.119. Efectuaţi întîi calculele dintre acolade.

IV.124. Un sfert dintr-un număr se află împărţind acel număr la patru.

IV.125. Folosiţi metoda grafică pentru a ilustra noţiunile : un sfert, jumătate, de două ori mai mare.

IV.126. Folosiţi-vă de un desen prin care să arătaţi ce înseamnă un sfert din numărul elevilor din urma sa.

IV.127. Ştiind că *a* reprezintă un sfert dintr-un număr, aflaţi numărul înmulţind pe *a* cu 4.

IV.129. Un sfert din jumătate dintr-un număr înseamnă o optime din acel număr. Faceţi un desen !

IV.130. 3/4 din *b* înseamnă : *b* se împarte la 4 şi apoi rezultatul se înmulţeşte cu 3.

IV.131. $\frac{a}{b}$ din numărul x se calculează astfel : $(x : b) \cdot a$.

IV.132. Folosiţi metoda figurativă ; porniţi de la sfîrşitul problemei.

IV.133. În final, dacă folosiţi metoda grafică, veţi găsi că : 16 lei + + 24 lei = 40 lei, reprezintă $\frac{2}{5}$ din cît îi rămăsese după prima cheltuială.

IV.134. Suma de bani a lui Petrică şi Costică la un loc, este formată din 6 părţi egale cu suma lui Costică. După împrumutul pe care-l face Costică, suma totală este formată din trei părţi egale cu noua sumă a lui Costică.

IV.135. Două jumătăţi dintr-un număr este acel număr.

IV.136. $\frac{2}{5}$ din 4 800 înseamnă $(4\,800 : 5) \cdot 2$.

IV.137. Aflaţi întîi numerele ce reprezintă cantităţile de cărţi vîndute.

IV.138. Pentru a afla cîţi pui şi cîte găini sînt, precum şi preţul unei găini şi apoi al unui pui folosiţi metoda grafică.

IV.139. Mai întîi aflaţi cît reprezintă un sfert din economia Ioanei.

IV.140. În primele două luni realizează $\frac{4}{9} + \frac{2}{9}$ adică $\frac{6}{9}$ din numărul pieselor planificate, restul de $\frac{3}{9}$ reprezentînd 9 000 de bucăţi.

IV.142.

$$1=\frac{11}{11};\ 4=\frac{4\times17}{17};\ 3=\frac{3\times17}{17};\ \frac{17}{17}=1.$$

IV.144. Aplicați operația de scădere de mai multe ori.

IV.145. Transformați în litri pe minut debitul fiecărui robinet și apoi în litri pe oră.

IV.146. Rămîne în bazin diferența dintre cantitatea de apă care curge prin robinete și cea care se scurge prin țeavă.

IV.147. Calculați distanța care trebuie recuperată de cel de al doilea avion.

IV.148. Folosiți-vă de un desen.

IV.149. Vezi problema anterioară.

IV.150. a) Folosiți un desen. c) Sînt două situații.

IV.151. Aflați viteza în sensul curentului.

IV.154. Folosiți metoda grafică, după ce aflați semiperimetrul.

IV.156. Realizați un desen și observați că datele problemei pot fi : suma a două numere este 25, unul din ele fiind de patru ori mai mare decît celălalt.

IV.157. Calculați întîi semiperimetrele.

IV.158. Urmăriți în biblioteca voastră cum sînt așezate două volume ale unei cărți. Puteți să faceți o experiență cu două cărți la întîmplare. Luați un exemplu cu numere mai mici, cum ar fi : volumul I cu 8 pagini, iar al doilea cu 10 pagini.

IV.159. Numărați cifrele cu care sînt scrise numerele naturale de la 1 inclusiv la 100 inclusiv.

IV.160. Se înlocuiește **x** cu numărul dat.

IV.161. Scrieți egalitatea dată, astfel : $3\cdot b=11-a$.

IV.162. Găsiți întîi numerele a și b. Dacă deîmpărțitul este zero și împărțitorul nu este zero, atunci cîtul este zero.

IV.164. Situația următoare, nu este convenabilă.



Fig. IV.164.

IV.165. Realizați un desen.

IV.167. Aflați întîi numărul de trei cifre. Numărul de la cifra zecilor nu poate fi de... două cifre !

a) Folosiți metoda grafică.

b) Aflați semiperimetrul.

IV.168. Realizați în vasele mici cîte 3 litri etc.

IV.169. Cercetați ce s-ar fi întîmplat dacă s-ar fi vîndut numai mere de un singur preț.

IV.170. Efectuați întîi calculele.

IV.171. x nu poate fi zero.

CLASA A V-A

CAPITOLUL I

NUMERE NATURALE

V.1.1 Ordinea operațiilor

V.1. Calculați :

a) $20 + 20 : 20 - 20$;

b) $(15 + 15 \cdot 15) : 15$;

c) $1\,985 + 15 \cdot (15 + 29\,775 : 15)$.

(Etapa locală, 1985, Alba)

V.2. $403 - 87\,108 : 427 + 345\,054 : 786 \cdot 608 - 108\,875 + 987 \cdot 69$.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

V.3. $3 + 10 \cdot [362 + 10 \cdot (24 + 24 : 4)]$.

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

V.4. $1\,500 + \{250 : 5 + 15 : 3 \cdot [265 - (50 : 25 + 2) \cdot 65] \cdot 150\}$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

V.5. $\{[(7 \cdot 3 - 5) + 2 \cdot 6] : 4 + 5\} \cdot 10 - [(4 + 3^2) \cdot 5 - 60]$.

(Etapa locală, 1985, Brașov)

V.6. $2^{74} : (2^3 \cdot 2^{70}) + 103 \cdot (2 + 2 \cdot 102)$.

(Etapa locală, 1985, Brașov)

V.7. $3\,125 - 5 \cdot (2 + 2 \cdot 106) + 6^7 : (2^4 \cdot 3^5)$.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.8. $2^3 + 2^{10} : 2^8 \cdot 2 + 2 \cdot 2^7 : 2^5 + 2^{10} : (3 \cdot 2^5 + 2^5) - 4 \cdot 2^3$.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

V.9. $3^{87} : (3^3 \cdot 3^{14})^5 + 7 \cdot (352 - 350 : 2)$.

V.10. $(3^{204} : 3 + 10^{248} \cdot 10) : (3^{203} + 10^{249})$.

(Etapa locală, 1985, Bacău)

V.11. $[2^7 \cdot 2^{10} + 5^{201} : 5^{106} - 3 \cdot (3^2)^5] : (2^{17} + 5^{95} - 3^{11})$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

V.12. $[2^{48} : 2^{18} + (3^4)^5 + 6^{23} : 6^{13}] : [2^{10} \cdot 3^{10} + 2^{17} \cdot 2^{13} + (3^5)^4]$.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

V.13. $6 + 2 \cdot [(3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 18 : 3^2 + 3 \cdot 11) : 2^2]$.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

V.14. $10 \cdot \{18^2 : 324 + 2 \cdot [(2^2 \cdot 3)^{15}) : (2^{29} \cdot 3^{15}) + 1^{24}]\}$.

(Etapa locală, 1986, Bihor, Covasna ; județeană, Maramureș)

V.15. $2^3 + [(2^3)^7 - (2^7)^3 + 3 \cdot 3^4 - 81] : \{3^2 \cdot [301 - 10 \cdot (24 + 2^{1986} : 2^{1985} \cdot 3)]\}$.

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

V.16. $3^{100} : [3^{40} \cdot 3^{58} + (3^{10} \cdot 3^{15})^5 : 3^{27} + (4^{57} : 4^{56} - 1^4)^{90} \cdot 3^8]$.

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

V.17. Calculați :

$$E = (100\,000 - 1^2) \cdot (10\,000 - 2^2) \cdot (10\,000 - 3^2) \cdot \ldots \cdot (10\,000 - 198^2).$$

(Etapa locală, 1986, Cluj)

V.18. $316 \cdot 147 - 316 \cdot 47$.

(Etapa locală, 1986, Neamț)

V.19. $5\,739 \cdot 4\,325 - 4\,324 \cdot 5\,739 - 5\,738$.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

V.1.2 Probleme care se pot rezolva prin metoda figurativă

V.20. Elevii unei clase au participat la muncă patriotică în două zile, astfel : în prima zi 15 elevi, în a doua zi de două ori mai mulți ca în prima zi.

Aflați numărul elevilor din clasă, dacă 12 din ei au venit în fiecare zi, iar 3 elevi în nici o zi.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

V.21. Fiecare din cei 80 de elevi ai unui colectiv știe cel puțin una din limbile franceză sau engleză. 41 știu limba franceză, iar 60 limba engleză. a) Cîți dintre elevi știu numai franceza ? b) Cîți știu numai engleza? c) Cîți știu ambele limbi ?

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

V.22. La concursul de matematică, etapa pe localitate, la clasa a V-a au participat 1 500 elevi. Știind că numărul elevilor care s-au calificat pentru faza județeană este de 3 ori mai mic decît al celor care nu s-au calificat, determinați numărul elevilor care vor participa la faza județeană.

(Etapa locală, 1985, Călărași)

V.23. De la un depozit se aprovizionează două magazine alimentare cu orez. În primul s-a adus o cantitate de 6 ori mai mare decît în al doilea. Dacă se vînd 2 000 kg orez de la primul magazin și se mai aduc 520 kg la al doilea, cantitățile de orez din cele două magazine devin egale. Aflați cît orez s-a adus la început în fiecare magazin.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

V.24. Detaşamentul clasei a V-a B şi-a propus să participe la realizarea angajamentului de muncă patriotică cu materiale refolosibile în valoare de 3 060 lei. În trimestrul al II-lea a realizat de două ori mai mult decît în trimestrul I. În trimestrul al III-lea a realizat cu 180 lei mai mult decît în trimestrul al II-lea depăşind planul anual cu 540 lei. Aflaţi cît a realizat detaşamentul pînă la sfîrşitul trimestrului al II-lea.

(Etapa judeţeană, 1986, Călăraşi)

V.25. Aflaţi două numere ştiind că al doilea este de 7 ori mai mare decît primul, iar suma dintre de două ori primul număr şi de 3 ori cel de al doilea este 690.

(Etapa judeţeană, 1986, Vaslui)

V.26. Un pix, o carte şi un joc costă împreună 63 lei. Pixul costă cu 5 lei mai puţin decît cartea, iar cartea împreună cu pixul costă cu 7 lei mai mult decît jocul. Aflaţi preţul fiecărui obiect.

(Etapa locală, 1986, Bihor)

V.27. În două cutii sînt la un loc 820 creioane. Dacă din prima cutie s-ar lua 41 creioane şi s-ar pune în a doua cutie, atunci în prima ar fi de 3 ori mai multe creioane decît în a doua. Cîte creioane sînt în fiecare cutie ?

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

V.28. În două depozite sînt 3 560 t de fructe. Dacă se transportă 920 t de fructe de la depozitul mare la cel mic, atunci mai rămîn, în cel mare, cu 60 t fructe mai mult decît în cel mic. Aflaţi cantităţile de fructe din cele două depozite.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

V.29. În trei lăzi, la un loc, sînt 612 kg marfă. În a doua ladă este de două ori mai multă marfă decît în prima şi cu 2 kg mai puţin decît în lada a treia. Cîte kg de marfă sînt în fiecare ladă ?

(Etapa locală, 1985, Braşov ; 1986, Bacău, Covasna)

V.30. Suma a trei numere naturale a, b, c, este 900. Aflaţi numerele ştiind că b este de trei ori mai mare decît a şi cu 25 mai mic decît c.

V.31. Aflaţi trei numere naturale ştiind că suma lor este 609, primul este de două ori mai mare decît al doilea, iar al treilea este cu 4 mai mare ca primul.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

V.32. Se consideră trei numere naturale. Diferenţa dintre al doilea şi primul este un număr natural egal cu diferenţa dintre al treilea şi al doilea. Se ştie că al doilea este numărul 245. Aflaţi suma celor trei numere.

(Etapa locală, 1986, Maramureş ; judeţeană, Vîlcea)

V.33. Deschizînd o carte la întîmplare se observă că suma numerelor care indică cele două pagini este 217. La ce pagină s-a deschis cartea ?

(Etapa judeţeană, 1986, Iaşi)

V.34. Tatăl şi fiul au împreună 48 de ani. Tatăl este de trei ori mai în vîrstă decît fiul. Care este vîrsta fiului ? Peste cîţi ani vîrsta tatălui va fi de 2 ori mai mare decît a fiului ?

(Etapa locală, 1986, Covasna)

V.35. Două numere naturale sînt astfel încît diferenţa lor este 226, iar primul adunat cu 2 este de 8 ori mai mic decît al doilea. Aflaţi cele 2 numere.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

V.36. Suma a trei numere este 270. Dacă din fiecare se scade acelaşi număr, se obţin numerele 24, 81, 132. Aflaţi cele trei numere.

(Etapa judeţeană, 1986, Mureş)

V.37. Într-o familie sînt trei copii. Ionuţ este cu trei ani mai mic decît Sandu, iar Sandu este cu 6 ani mai mare decît Cătălina. a) Ce vîrstă are în prezent fiecare copil, dacă acum doi ani vîrsta lui Sandu era cît suma vîrstelor celorlalţi copii ? b) Ce vîrstă au părinţii copiilor dacă tata este cu doi ani mai mare decît mama, iar suma vîrstelor actuale ale lor este cît suma vîrstelor pe care cei trei copii le vor avea peste 14 ani ?

(G.M. nr. 3/1984 ; etapa judeţeană, 1985, Cluj)

V.38. Suma a cinci numere naturale consecutive este 415. Aflaţi numerele.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

V.39. Într-o cutie sînt numai bile de trei culori : roşii, galbene şi negre. Numai 27 din ele nu sînt negre şi numai 39 din ele nu sînt roşii. Numărul bilelor roşii este de două ori mai mic decît numărul de bile negre. Aflaţi numărul de bile din fiecare culoare.

(Etapa judeţeană, 1986, Sibiu ; locală Teleorman ; 1985, Bistriţa)

V.40. Pentru serbarea pomului de iarnă s-au cumpărat mere, ciocolată şi turtă dulce, în total 760 bucăţi. Mere au fost cu 80 de bucăţi mai mult decît ciocolată, iar turtă dulce cu 120 bucăţi mai puţin decît mere. Aflaţi care este numărul cel mai mare de pachete care se pot realiza, avînd în fiecare cîte un măr, o ciocolată şi o turtă dulce.

(Etapa judeţeană, 1986, Galaţi)

V.41. Într-o librărie se găsesc instrumente necesare pentru realizarea desenelor, grupate astfel : rigle şi raportoare 1 250 bucăţi luate împreună, echere şi raportoare 2 050 bucăţi la un loc, rigle şi echere, deasemenea luate împreună, 1 600 bucăţi. Care este cel mai mare număr de truse complete (echer, riglă, raportor) ce se pot forma cu aceste instrumente ?

V.42. La un concurs sportiv s-au acordat trei premii în valoare totală de 825 lei. Aflaţi ce sumă a primit fiecare ştiind că sportivul situat pe locul I a primit cu 175 lei mai mult decît al II-lea, iar acesta primeşte jumătate din cît primeşte primul şi al treilea la un loc.

(Etapa judeţeană, 1986, Mehedinţi)

V.43. La un concurs sportiv, s-au acordat trei premii în valoare de 252 lei. Aflaţi ce sumă a primit fiecare, ştiind că sportivul situat pe locul întîi a primit cu 24 de lei mai mult decît al doilea, iar că acesta a primit jumătate din cît primesc primul şi al treilea la un loc.

(Etapa judeţeană, 1986, Sălaj)

V.44. La o fabrică de ciment se încarcă o anumită cantitate de ciment în vagoane de 15 t şi de 40 t. Dacă se încarcă numai vagoanele de 15 t rămîn în depozit 10 740 t de ciment. Dacă se încarcă numai cele de 40 t rămîn în depozit 9 880 t de ciment. Încărcînd şi vagoanele de 15 t şi vagoanele de 40 t, rămîn în depozit 5 620 t. Aflaţi numărul vagoanelor de 15 t şi de 40 t, cît şi cantitatea totală de ciment din depozit.

(Etapa judeţeană, 1986, Covasna)

V.45. Un elev economiseşte bani pentru o excursie. Dacă depune lunar la C.E.C., cîte 80 lei îi mai lipsesc la data stabilită pentru excursie 40 lei, iar dacă ar depune cîte 100 lei lunar ar strînge suma necesară cu două luni mai devreme. Aflaţi costul excursiei.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

V.46. Dacă într-o clasă se aşază cîte doi elevi în fiecare bancă, rămîn trei elevi în picioare ; dacă se aşază cîte trei elevi într-o bancă, rămîn patru bănci libere. Cîte bănci şi cîţi elevi sînt în clasă ?

(Etapa locală, 1985, Iaşi)

V.47. Într-o sală de clasă intră mai mulţi elevi. Dacă se aşază cîte doi într-o bancă, rămîn 9 elevi în picioare, iar dacă se aşază cîte 3 într-o bancă rămîn 7 bănci neocupate şi una ocupată cu un singur elev. Cîte bănci şi cîţi elevi sînt ?

(Etapa judeţeană, 1986, Suceava)

V.48. Dacă într-o sală de clasă se aşază cîte trei elevi într-o bancă, rămîn 5 bănci libere, iar dacă se aşază cîte doi, rămîn 5 elevi în picioare. Cîţi elevi şi cîte bănci sînt în sală ?

(G.M. Nr. 11/1985 ; etapa judeţeană, 1986, Olt)

V.1.3 **Probleme cu privire la teorema împărţirii cu rest**

V.49. La o împărţire de numere naturale se ştie că deîmpărţitul este 39 iar restul 1. Aflaţi împărţitorul şi cîtul, ştiind că sînt diferite de 1 şi că împărţitorul este mai mare decît cîtul.

(Etapa locală, 1985, Constanţa)

V.50. Suma a două numere naturale este 52. Aflaţi cele două numere, ştiind că împărţind pe unul la celălalt obţinem cîtul 3 şi restul 4.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

V.51. Găsiţi două numere naturale care au suma 485, iar cîtul împărţirii celui mai mare la cel mai mic, 16 şi restul 26.

(Etapa judeţeană, 1986, Prahova)

V.52. Diferența a două numere naturale este 5 085. Împărțind numărul mare la numărul mic obținem cîtul 5 și restul 141. Aflați numerele.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

V.53. Un număr este cu 36 mai mare decît altul. Împărțind suma celor două numere la diferența lor, obținem cîtul 35 și restul 34. Aflați cele două numere.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

V.54. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la 6 să dea restul 5 și împărțit la 5 să dea restul 4.

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

V.55. Un număr natural de trei cifre, scris în baza 10, împărțit la răsturnatul său dă cîtul 2 și restul 100. Aflați numărul știind că diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților este 4.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

V.1.4 Probleme care se pot rezolva prin metoda ipotezelor sau prin metoda comparației

V.56. Într-un bloc sînt, în total, 42 apartamente de cîte două camere și de cîte 4 camere. Știind că blocul are, în total, 140 de camere, aflați cîte apartamente au două camere și cîte au 4 camere.

(Etapa județeană, 1986, Mureș ; locală, Bacău, Iași)

V.57. La o serbare școlară s-au vîndut 415 bilete la prețul de 4 lei și respectiv, de 6 lei biletul, încasîndu-se în total 2 160 lei. Cîte bilete din fiecare categorie au fost vîndute ?

(Etapa locală, 1986, Mureș)

V.58. La o fermă agricolă se cresc oi și găini, care au 650 capete și 2 260 picioare. Cîte oi și cîte găini sînt la fermă ?

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

V.59. Cumpărîndu-se un număr de covoare s-a achitat costul lor cu 148 bancnote de 100 lei și de 25 lei. Știind că suma achitată este de 6 850 lei, aflați cîte bancnote de 100 lei și cîte de 25 lei s-au folosit.

(Etapa județeană, 1985, Alba)

V.60. La practica agricolă de toamnă, într-o zi elevii clasei a V-a A și a V-a B au recoltat tomate, aceeași cantitate fiecare băiat și aceeași cantitate fiecare fată (alta decît a unui băiat). Se știe că cei 20 de băieți și cele 16 fete din clasa a V-a A au recoltat 328 kg, iar cei 10 băieți și cele 30 fete din clasa a V-a B au recoltat 340 kg. Aflați cît a recoltat fiecare băiat și fiecare fată.

(Etapa locală, 1986, Călărași)

V.61. Un elev a cumpărat 5 caiete şi două pixuri, cheltuind 40 lei. Cît costă un caiet şi cît costă un pix, ştiind că 10 caiete şi 5 pixuri costă 95 lei? Caietele sînt de acelaşi preţ; la fel şi pixurile.

(Etapa judeţeană, 1986, Alba)

V.62. Cinci cărţi şi trei caiete costă 64 de lei, iar trei cărţi şi 5 caiete costă 48 lei. Cîte cărţi şi cîte caiete s-au cumpărat cu 103 lei dacă au fost plătite 13 bucăţi?

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

V.1.5 Probleme de mişcare

V.63. Un tren merge cu viteza de 46 km/oră. Pe o şosea alăturată liniei ferate circulă un automobil a cărui viteză este răsturnatul numărului care exprimă viteza trenului în km/oră. Determinaţi lungimea trenului ştiind că automobilul depăşeşte trenul într-un minut (lungimea automobilului se neglijează).

(Etapa judeţeană, 1986, Gorj)

V.64. Un biciclist şi un motociclist au plecat la ora 9 din Focşani spre Bucureşti, primul mergînd în medie cu 23 km/oră, al doilea în medie cu 46 km/oră. La o oră de la sosirea sa în Bucureşti motociclistul se întoarce spre Focşani, mergînd cu aceeaşi viteză medie şi pe aceeaşi şosea. La ce oră se vor întîlni cei doi, ştiind că distanţa Focşani—Bucureşti este de 184 km?

(Etapa judeţeană, 1986, Vrancea)

CAPITOLUL II

UTILIZAREA LITERELOR ÎN CALCUL

V.2.1 Mulţimi

V.65. Determinaţi elementele mulţimii $(A \cup B) \cap C$ unde $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{0, 7, 8\}$.

(Etapa locală, 1985, Bistriţa)

V.66. Se dau mulţimile $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 < x \leq 8\}$ şi

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ divide pe } 60\}.$$

Găsiţi elementele mulţimilor A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$.

(Etapa judeţeană, 1986, Vrancea)

V.67. Fie mulţimea $M = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 4x + 1 \leqslant 17\}$. Determinaţi elementele mulţimilor : a) $A = \{2x \mid x \in M\}$, $B = \{3x \mid x \in M\}$, $C = \{6x \mid x \in M\}$, $D = \{3x + 1 \mid x \in M\}$; b) $(A \cap C) \cup B$; c) $(A \cup B) \cap C$; d) $(A - C) \cap D$; e) $(C \cap D) - B$.

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

V.68. Se dau mulţimile: $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbf{N}, n \leqslant 4\}$; $B = \{y \mid y \in \mathbf{N}^*, y = x - 2, \ x \in A\}$; $C = \{z \mid z \in \mathbf{N}, \ z = y^2, \ y \in B\}$. Calculaţi : a) $(A \cup B) \cap C$; b) $(A - B) \cup C$; c) $A - (B \cap C)$.

(G.M. Nr. 4/1985 ; etapa locală, 1986, Bihor, Teleorman ; judeţeană, Sibiu)

V.69. Găsiţi elementele mulţimilor A şi B ştiind că sînt satisfăcute toate condiţiile următoare : a) $A \cup B = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \leqslant x < 8\}$; b) $A \cap B = \{4 ; 5\}$; c) $A - B = \{3 ; 7\}$.

(Etapa locală, 1986, Galaţi)

V.70. Cîte elemente poate avea reuniunea a două mulţimi care are fiecare cîte trei elemente ?

(Etapa judeţeană, 1986, Sălaj)

V.71. Găsiţi elementele mulţimilor A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile : $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; $A \cap B = \{a, b\}$; $A - B = \{c, d\}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

V.72. Aflaţi X şi Y ştiind că ele îndeplinesc simultan următoarele condiţii :

a) $X \cap Y = \{3, 5, 7\}$;
b) $X - Y = \{2, 6\}$;
c) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(Etapa locală, 1986, Covasna, Iaşi)

V.73. Determinaţi elementele mulţimilor A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile :

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
b) $A \cap B = \{3, 4\}$;
c) $A \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$;
d) $\{1, 2\} \cap B \neq \varnothing$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

V.74. a) Aflaţi elementele mulţimilor A, B, C ştiind că sînt îndeplinite simultan condiţiile : a) $A \cap B = \{4, 5\}$, $B \cap C = \{6, 7\}$, $A \cap C = \{2, 3\}$ şi că fiecare mulţime are 4 elemente ; b) Dîndu-se mulţimea $D = \{2a, 7\}$ aflaţi perimetrul unui pătrat care are latura de a cm astfel încît să avem $(C - A) \cap B = D$, unde A, B, C sînt mulţimile de la punctul a).

(Etapa locală, 1986, Brăila)

V.75. Găsiţi elementele mulţimilor X şi Y ştiind că sînt îndeplinite toate condiţiile ce urmează :

a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
b) $X \cap Y = \{4, 6, 9\}$;
c) $X \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;
d) $Y \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(Etapa judeţeană, 1985, Cluj ; 1986, Suceava)

V.76. Se dau mulţimile $A = \{1, 2, x\}$ şi $B = \{1, y, 3\}$. Aflaţi numerele x şi y astfel încît $A \cup B = A \cap B$.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

V.77. Găsiţi mulţimile A şi B ştiind că :

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
b) $A \cap B = \{1, 2\}$;
c) $A - B$ are elemente ;
d) suma elementelor lui B este un număr impar.

V.2.2 Utilizarea literelor în calcul

V.78. Pentru $a = 5$, $b + c = 10$ şi $b - c = 8$, calculaţi $ab + ac$ şi $ab - ac$.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

V.79. Aflaţi numărul x, ştiind că : a) $xa + xb = 20$ şi $a + b = 5$; b) $3bx + 2ax - cx = 40$ şi $3b + 2a = c + 20$.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

V.80. Care din numerele $a = 7(x + 1) + 3x + 1$ şi $b = 4(x + 1) + 6(x + 2)$, unde $x \in \mathbf{N}$, este mai mare ?

(Etapa municipală, 1986, Bucureşti)

V.81. Demonstraţi că $y = (3x + 2)(x + 3)$ este număr par, oricare ar fi $x \in \mathbf{N}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

V.82. Din egalităţile $ab + ac = bc + c^2$ şi $b + c = 15$ unde $a, b, c \in \mathbf{N}$, deduceţi : a) o relaţie între a şi c ; b) valoarea numerică a sumei $a + 2b + c$; c) valoarea produsului $(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$.

(Etapa judeţeană, 1986, Buzău)

V.83. Arătaţi că : a) $7 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n = 3^{n+2}$; b) $7 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n = 5^{n+1}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Teleorman)

V.84. Se ştie că $9^n = a$. Calculaţi 3^{2n+1} şi 3^{4n}.

(Etapa judeţeană, 1986, Vrancea)

V.85. Se dă numărul $a = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + \ldots$ a) Găsiţi termenul de rang 6 ; b) Stabiliţi dacă a este **pătratul unui număr natural.**

(Etapa judeţeană, 1986, Caraş-Severin)

V.86. Aflaţi numărul $\overline{2abcd3}$, scris în baza 10 **ştiind că** $\overline{2abcd} + \overline{abcd3} = 83\,781$.

(Etapa locală, 1986, Mureş)

V.87. Găsiţi toate numerele naturale, scrise **în baza 10, de forma** $\overline{xy}$ care sînt cu 45 mai mari ca $\overline{yx}$.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

V.2.3 Propoziţii adevărate ; propoziţii false

V.88. Puneţi paranteze pentru a indica ordinea **operaţiilor astfel** încît să obţineţi adevăruri : a) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 37$; b) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 13$; c) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 28$; d) arătaţi alte trei **situaţii, punînd paranteze** şi prin care să obţineţi alte rezultate.

(Etapa locală, 1986, Călăraşi)

V.89. Găsiţi valoarea logică a propoziţiei : $(10 - 10 : 10)(100 - 100 : 100)(1\,000 - 1\,000 : 1\,000) = 3^6 \cdot 11 \cdot 111$.

(Etapa locală, 1986, Călăraşi)

V.90. Aflaţi anii de naştere a doi fraţi ştiind **că sînt adevărate** toate afirmaţiile următoare : a) sînt născuţi în acest **secol (secolul XX))** ; b) anii lor de naştere reprezintă numere scrise cu **aceleaşi cifre** ; **c) diferenţa** de vîrstă dintre cei doi fraţi este de 9 ani.

(Etapa locală, 1986, Galaţi, Dolj)

V.2.4 Ecuaţii şi inecuaţii în N

Rezolvaţi ecuaţiile cu necunoscuta x, în **mulţimea N** :

V.91. $2\{3[4(5x + 1) - 3] - 2\} = 2$.

(Etapa judeţeană, 1986, Covasna)

V.92. $\{2 \cdot [14 + (5 + x) : 6] - 5\} : 9 + 7 = 10$.

(Etapa judeţeană, 1986, Brăila)

V.93. $1 + 3 \cdot \{4^2 + 5 \cdot [3^6 - 6(x - 3 \cdot 2^5)]\} + 1\,984^0 = 1\,985$.

(Etapa judeţeană, 1986, Tulcea, locală, Teleorman)

V.94. $9 - (25 - 16) : 3 = [17 - 3(9 - 9)] \cdot x$.

(Etapa judeţeană, 1986, Iaşi)

V.95. Găsiţi x şi y astfel încît : $12_x + 36_y = 34$ unde x şi y reprezintă baze de numeraţie.

(Etapa locală, 1986, Constanţa)

V.96. Găsiţi x astfel încît : $32 - 12 : 3 + 5x < 63$, $x \in \mathbf{N}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Iaşi)

V.97. Găsiţi $x \in \mathbf{N}$ astfel încît : $x - \{19\,095 : 335 - 2^2 [2 \cdot 5 + (2^3 \cdot 5^2)^{25} : (2^{73} \cdot 5^{50})]\} \cdot 5 \leqslant 5$.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

CAPITOLUL III

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

V.98. Scrieţi toate numerele naturale de două cifre care îndeplinesc simultan condiţiile următoare : a) se împart exact (fără rest) la 7 ; b) au suma cifrelor 10.

(Etapa locală, 1985, Alba)

V.99. Aflaţi toate numerele de 4 cifre, formate cu cifrele 1 ; 2 ; 3 ; 6 şi care se divid cu 3, apoi pe cele divizibile cu 6.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

V.100. Se dă numărul natural $\overline{21x}$, scris în baza 10. Înlocuiţi x cu o cifră, astfel încît numărul să fie divizibil cu : a) 5 ; b) 6 ; c) 12.

(Etapa locală, 1986, Iaşi)

V.101. Aflaţi cel mai mic şi apoi cel mai mare număr natural de forma $\overline{41x78y}$ divizibil cu 15.

(G.M. Nr. 5/1985 ; etapa locală, 1986, Bihor)

V.102. Aflaţi a şi b astfel ca numărul natural $\overline{25a7b}$, scris în baza 10, să fie divizibil cu 15. Ce condiţie trebuie să mai punem pentru ca să avem o soluţie unică ?

(Etapa judeţeană, 1986, Maramureş)

V.103. A este mulţimea de numere $\overline{12y}$, scrise în baza 10, divizibile cu 12 iar B este mulţimea de numere $\overline{1ab}$, scrise în baza 10, divizibile cu 15. a) Aflaţi $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

(Etapa judeţeană, 1986, Covasna, Galaţi ; locală, 1985, Iaşi)

V.104. Determinaţi elementele mulţimii $M = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \leqslant 20$ şi $6 \mid 10 + x\}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Prahova)

V.105. Enumeraţi elementele mulţimilor $A = \{x \mid x = \overline{2a3b},\ 15 \mid x\}$, $B = \{y \mid y = \overline{2m3n},\ 18 \mid y\}$, $(A \cap B) - (A \cup B)$, $(A \cup B) \cap (B - A)$ (x şi y sînt în baza 10).

(G.M. Nr. 11/1985, etapa judeţeană, 1986, Bihor, Tulcea, Teleorman)

V.106. Găsiţi cel mai mic şi apoi cel mai mare număr natural de forma $\overline{2x3y}$, în baza 10, divizibil cu 15.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

V.107. Găsiţi toate numerele naturale, în baza 10, de trei cifre, divizibile cu 18 ştiind că : a) au toate cifrele diferite ; b) oricare două cifre alăturate diferă între ele printr-o unitate.

(Etapa judeţeană, 1986, Giurgiu)

V.108. Aflaţi cel mai mare şi cel mai mic număr natural de forma $\overline{619x7y}$ divizibil cu 18.

(Etapa judeţeană, 1986, Prahova)

V.109. Aflaţi toate numerele naturale de 4 cifre, scrise în baza 10, care îndeplinesc toate condiţiile ce urmează :

a) au cifra sutelor 9 ;

b) au cifra zecilor, cifra zero ;

c) sînt divizibile cu 18.

Adăugaţi la condiţiile de mai sus, una din condiţiile de mai jos, astfel încît problema să admită trei soluţii :

d) sînt numere pare ;

e) sînt numere mai mici decît 1 000 ;

f) sînt numere divizibile cu 4.

(Etapa locală, 1985, Bihor)

V.110. Găsiţi elementele mulţimii A, care sînt numere de forma $\overline{abcd}$ divizibile cu 36, ştiind că c şi d sînt numere naturale consecutive.

(Etapa locală, 1985, Bacău)

V.111. A este mulţimea de numere naturale de forma $\overline{7a8b}$, scrise în baza 10, divizibile cu 15. B este mulţimea de numere naturale de forma $\overline{7x8y}$, scrise în baza 10, divizibile cu 40. Scrieţi elementele mulţimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$.

(Etapa locală, 1985, Covasna)

V.112. Găsiţi un număr natural format din trei cifre, ştiind următoarele : a) este divizibil cu 22 ; b) împărţit la 5, se obţine rest 2 ; c) cifra sutelor este cu 4 mai mare decît cifra unităţilor.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara, Prahova)

V.113. Găsiţi toate numerele naturale de forma $\overline{3x6y}$ ($x \neq y$), scrise în baza 10, divizibile cu 45.

(Etapa locală, 1986, Mureş ; 1985, Braşov, Bistriţa)

V.114. Aflați numerele în baza 10 de forma $n = \overline{495ab}$ care sînt divizibile cu 45.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

V.115. Găsiți x și y știind că numărul $\overline{4xy}$, scris în baza 10, se divide cu 45.

(G.M. Nr. 3/1984 ; etapa județeană, 1985, Cluj)

V.116. Arătați că numărul $N = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{1986}$ este divizibil cu 156.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

V.117. Aflați ultima cifră a numărului 3^{1986}.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.118. Aflați ultima cifră a numărului $a = 3^{1986} + 4^{1987} + 5^{1988}$.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

V.119. Ultima cifră a numărului natural n este diferită de 0 și 5. Care este ultima cifră a numărului $n^5(n+5)^3$?

(Etapa județeană, 1986, Sălaj)

V.120. Se dau numerele $x = 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^8$ și $y = 2^{10} \cdot 3^{12} \cdot 7^{14}$;

a) Cu cîte zerouri se termină numărul $N = x \cdot y$?

b) Care este ultima cifră a lui N diferită de zero ?

(Etapa județeană, 1986, Alba, Brăila)

V.121. Stabiliți dacă numărul $n = 98765432 + 9876543 + 23456789 + 3456789$ este sau nu un pătrat perfect (un pătrat al unui număr natural).

(Etapa locală, 1985, Argeș)

V.122. Arătați că numărul $N = 1\,986^{1986} + 1\,987^{1987} + 1\,988^{1988}$ este divizibil cu 5.

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

V.123. Arătați că numărul $A = 9^{12} - 7^{12}$ este divizibil cu 10.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

V.124. Arătați că pătratul numărului $N = 1\,983^{1986} + 1\,984^{1986} + 1\,985^{1986}$ este divizibil cu 100.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

V.125. Arătați că $a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ cu $n \in \mathbf{N}$ este divizibil cu 13.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

V.126. Arătați că numărul $a = 5^{2n+3} \cdot 9^{n+2} + 3^{2n+1} \cdot 25^{n+1}$ este divizibil cu 17.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

V.127. Arătaţi că numerele de forma : $a = 15^{n+1} + 3^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+2}$ sînt divizibile cu 27, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

V.128. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ numărul $E = 2^n \cdot 5^n + 1988$ este divizibil cu 18.

(Etapa judeţeană, 1986, Mehedinţi)

V.129. a) Aflaţi suma cifrelor numărului $p = 10^{1986} - 1$;

b) Demonstraţi că numărul $K = 10^n + 44$ este divizibil cu 36.

(Etapa judeţeană, 1986, Giurgiu)

V.130. Arătaţi că numărul $a = 2^{2n+1} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{n+1} + 4^n \cdot 3^{2n} \cdot 5^n$ se divide cu 1980, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

(Etapa judeţeană, 1986, Galaţi)

V.131. Găsiţi toate numerele naturale $\overline{xyz}$, scrise în baza 10, divizibile cu 4 sau cu 9, care sînt cu 396 mai mari ca răsturnatele lor $\overline{zyx}$.

(Etapa locală, 1985, Constanţa)

V.132. Fie $A = 3p^2 + 12k$.

a) Dacă p şi k sînt numere naturale, arătaţi că $A \in \mathbf{N}$;

b) Arătaţi că A este divizibil cu 3, oricare ar fi p şi k numere naturale ;

c) Determinaţi numărul $p \in \mathbf{N}$, astfel încît 4 să fie divizorul lui A.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

V.133. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, scrise în baza 10, ştiind că sînt divizibile cu 30, iar cifrele sale verifică egalităţile : $b - c = a + d = 3$ sau $c - b = a + d = 3$.

(Etapa judeţeană, 1985, Constanţa)

V.134. Aflaţi cel mai mic număr natural cu care trebuie înmulţit numărul 2 772 pentru a obţine un pătrat perfect (al unui număr natural).

(Etapa locală, 1985, Argeş)

V.135. Găsiţi numărul natural scris în baza 10, de forma $x = \overline{abcabc}$ care are cel mai mic număr de divizori.

(Etapa judeţeană, 1986, Suceava)

V.136 Determinaţi cel mai mic număr natural de forma $x = \overline{ababab}$, $a \neq b$ scris în baza 10, în ipoteza că are cel mai mic număr posibil de divizori.

(Etapa judeţeană, 1986, Mehedinţi)

V.137. a) Găsiţi numărul natural $n \neq 2$ care admite doar divizorii 1 ; 2 ; n.

b) Găsiţi numărul natural n la care suma divizorilor este $n + 3$.

(Etapa municipală, 1986, Bucureşti)

V.138. Se dau : $a \equiv [(20 \cdot 25^{200}) \cdot (2^{100} \cdot 10^3)] : (2^{100} \cdot 5^{400} \cdot 250)$, $b \equiv 6 + 2 \cdot [(3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 18 : 3^2 + 3 \cdot 11) : 2^2]$. Aflaţi cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

(Etapa judeţeană, 1986, Olt)

V.139. Găsiţi trei triplete de numere naturale a, b, c ştiind că produsul lor este 12 096, iar cel mai mare divizor comun al lor este 6.

(Etapa judeţeană, 1986, Constanţa)

V.140. Aflaţi două numere naturale, diferite de zero, ştiind că suma lor este 40, iar cel mai mare divizor comun al lor este 5.

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

V.141. Numerele 1 243, 6 532, 1 817 împărţite prin acelaşi număr natural dau resturile 13, 7 şi respectiv 2. Aflaţi împărţitorul.

(Etapa judeţeană, 1986, Iaşi)

V.142. Numerele 1 944, 1986 şi 2 000 sînt împărţite la acelaşi număr natural a şi se obţin respectiv resturile următoare : 0, 6 şi 2. Aflaţi numărul a.

(Etapa municipală, 1986, Bucureşti)

V.143. Numerele 2 435, 342 ; 4 527 împărţite la acelaşi număr dau respectiv resturile 35, 42 şi 27. Aflaţi numărul la care au fost împărţite.

(G.M. Nr. 6/1985 ; etapa judeţeană, 1986, Bihor)

V.144. Pionierii unei unităţi nu puteau fi aşezaţi cîte 20, cîte 50 şi nici cîte 70 deoarece de fiecare dată rămînea în afară acelaşi număr de pionieri. Cîţi pionieri puteau fi în acea unitate dacă numărul este un număr natural de trei cifre mai mare ca 700 ?

(Etapa judeţeană, 1986, Mehedinţi)

V.145. Un muncitor a executat un număr de piese. Numărîndu-le cîte 2, 3, 4, 5, 6 îi rămîne de fiecare dată o singură piesă. Cînd a numărat cîte 7 nu i-a mai rămas nici una. Aflaţi numărul de piese executate de muncitor, considerînd că este cel mai mic număr cu această proprietate.

(Etapa judeţeană, 1985, Buzău)

V.146. Într-o tabără sînt mai puţin de 500 pionieri. Dacă s-ar grupa cîte doi, cîte trei, cîte patru sau cîte cinci, atunci de fiecare dată un pionier rămîne singur. Dacă s-ar grupa însă cîte şapte, atunci grupele ar fi complete, fără a rămîne vreun pionier pe dinafară. Cîţi pionieri sînt în tabără ?

(Etapa judeţeană, 1986, Cluj)

V.147. Aflaţi cel mai mic număr natural pe care dacă-l împărţim pe rînd la 7, 6, 5, 4, se obţin resturile 6, 5, 4, respectiv 3.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.148. Un automobil parcurge distanţa dintre oraşele A şi B în 5 ore iar altul în 6 ore. Ambele automobile pleacă din oraşul A către B la aceeaşi oră, ajung în B şi se întorc către A ; continuă aceste curse, amîndouă, pînă cînd se întîlnesc din nou în A. După cîte ore se întîlnesc prima dată, amîndouă în A ?

(Etapa judeţeană, 1986, Prahova)

V.149. Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$, în baza 10, astfel încît să avem simultan : a) $b = 2c + 1$; b) $12 \mid \overline{abc}$ şi c) $a + b + c < 15$.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

V.150. Se dau numerele $a = 1 \cdot 2 - 1$, $b = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1$, $c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 - 1$, $d = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1$. Care din ele este număr prim ?

(Etapa municipală, 1986, Bucureşti)

V.151. Găsiţi numărul prim de 3 cifre ştiind că produsul cifrelor sale este 14.

(Etapa judeţeană, 1985, Alba)

V.152. Aflaţi valoarea logică (de adevăr) a afirmaţiei : „Pentru orice număr natural n, numărul $n(n + 3) + 13$ este număr prim".

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.153. Scrieţi numărul 1985 ca o sumă de două numere naturale neprime consecutive.

(Etapa locală, 1986, Maramureş)

V.154. Suma dintre un număr prim şi un număr natural impar este 24 735. Aflaţi numerele.

(Etapa locală, 1986, Maramureş)

V.155. Diferenţa dintre un număr natural par şi un număr prim este 1000. Aflaţi numerele.

(Etapa judeţeană, 1986, Giurgiu)

V.156. Suma dintre un număr natural prim, cu două cifre identice şi un număr natural este 2436.

a) Aflaţi cele două numere ;

b) Descompuneţi în factori primi, cel mai mare număr dintre cele găsite ;

c) Fie $M = \{d \mid d \in D_{2425},\ d \text{ număr prim}\}$. Arătaţi, fără a folosi o tabelă de numere prime, că orice element $d > 5$ al lui M este număr prim.

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

V.157. Determinaţi numerele prime a, b, c ştiind că $a + b - c = 1986$ şi $a - b = 6$.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

V.158. Determinați numerele prime a, b, c astfel încît $a + 10b + 12c = 82$.

(Etapa locală, 1986, Iași)

V.159. Găsiți 6 numere prime consecutive astfel ca suma lor să fie un număr prim.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.160. Se dau trei numere naturale x, y, z unde z este număr prim. Dacă adunăm pe x cu 1 produsul celor trei numere obținute este mai mare cu 30 decît produsul numerelor date. Dacă scădem din y numărul 1, produsul celor trei numere obținute este mai mic cu 20 decît produsul numerelor date. Aflați numerele x, y, z.

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

V.161. Suma a cinci numere naturale prime și distincte este 226. Aflați numerele știind că unul dintre ele are cifrele egale, iar două dintre ele sînt unul răsturnatul celuilalt.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

V.162. Se dau numerele naturale $\overline{25x}$ și 12. Găsiți numerele x astfel încît cele două numere date să fie prime între ele.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

V.163. Există x astfel încît numerele naturale $\overline{179x}$ și 2 310 să fie prime între ele ?

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

V.164. Determinați numerele p, q, r, t știind că de trei ori mai mare decît numărul p este jumătate din q, r este de două ori mai mic decît suma numerelor p și q, iar suma numerelor p, q și r este 21. Numărul t este $t = \{2^2 \cdot 5 \cdot 23 - 2 \cdot [2^3 \cdot 5^2 + (2^7 \cdot 25 \cdot 3^2) : (9 \cdot 4^3 \cdot 5)]\} : 10$.

Găsiți apoi elementele mulțimilor $A = \{x \mid x = \overline{2a3b},\ 15 \mid x\}$, $B = \{y \mid y = \overline{2m3n},\ 18 \mid y\}$, $C = \{p, q, r, 10\}$, $D = \{1, 2, t, 7\}$, $E = C \cup A$, $F = B \cup D$, $(F \cap F) - (E \cup F)$, $(E \cup F) \cap (F - E)$; x și y sînt numere naturale scrise în baza 10.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

V.165. Suma a trei numere naturale diferite este 54. Știind că unul din ele este media aritmetică a celorlalte două și că fiecare număr este divizibil cu 6, aflați cele trei numere.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

V.166. Arătați că suma tuturor numerelor naturale de trei cifre, scrise în baza 10 cu cifrele a, b, c, este divizibilă cu $a + b + c$.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

V.167. Se dă mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şi a, b, c trei elemente din această mulţime. Arătaţi că oricum am alege aceste elemente, suma tuturor numerelor de trei cifre, formate cu a, b, c (fără repetarea unei cifre în scrierea în baza 10 a numărului) este divizibilă cu 111.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

V.168. Demonstraţi că dacă cifrele unui număr de trei cifre sînt consecutive, atunci numărul se divide cu 3.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

V.169. Găsiţi numerele naturale, scrise în baza 10, care să fie de 7 ori mai mari decît cifra unităţilor numerelor respective.

(Etapa judeţeană, 1986, Vrancea)

V.170. Determinaţi elementele mulţimii $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \mid (5 + x)$ sau $x \mid (15 + 3x)$ sau $x \mid (12 + x)\}$.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

V.171. Determinaţi toate perechile de numere naturale m şi n pentru care $m^2 (n + 1) = 800$.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

V.172. Aflaţi a, b, c numere naturale, ştiind că $a^b \cdot c - 1986^0 = 2^2 \cdot 3$.

(Etapa judeţeană, 1986, Caraş-Severin)

V.173. Trei numere naturale sînt astfel încît al doilea este de trei ori mai mare ca primul, iar al treilea de două ori mai mare ca al doilea. Se ştie că produsul celor trei numere, P, este divizibil cu suma lor S. Justificaţi că suma celor trei numere se divide cu 50.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

CAPITOLUL IV

NUMERE RAŢIONALE POZITIVE

V.174. Există un număr natural a astfel încît fracţiile $\frac{2}{a}$ şi $\frac{5}{3}$ să fie echivalente ?

(Etapa judeţeană, 1985, Prahova)

V.175. Găsiţi $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care avem : $\frac{1}{2} < \frac{n}{15} < \frac{7}{12}$.

(Etapa locală, 1985, Covasna)

V.176. Determinaţi $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît : $\frac{3}{20} < \frac{2}{n^2} < \frac{3}{10}$.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

V.177. Simplicați fracțiile :

a) $\frac{23232323}{32323232}$;

b) $\frac{3+6+9+12+\ldots+153}{4+8+12+\ldots+204}$.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

V.178. Calculați : $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)$.

(Etapa locală, 1985, Bacău)

V.179. Calculați : $6\cdot\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{24}\right):\frac{7}{6}\right]$.

(Etapa locală, 1985, Brașov)

V.180. Găsiți numerele x și y care verifică simultan toate propozițiile ce urmează :

a) $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)\cdot x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)y$;

b) $x+y=1$.

(G.M. Nr. 2/1985 ; etapa județeană, 1986, Bihor)

V.181. Rezolvați ecuația : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=x\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)$.

(G.M. Nr. 11—12/1983 ; etapa locală, 1985, Bihor)

V.182. Calculați :

$$3\cdot\{2\cdot 3^2+5^2:5^0+69\cdot[2^4\cdot 3-(6^{16})^2:2^{30}:(3^6)^5+4\,725:63]\}.$$

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

V.183. Găsiți x astfel încît :

$$4\frac{1}{2}:\left[47\cdot\frac{3}{8}-\frac{\left(26\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\cdot x\right)\cdot 2\frac{2}{5}}{\frac{22}{35}}\right]=\frac{4}{11}.$$

(Etapa locală, 1985, Iași)

V.184. Aflați toate fracțiile ireductibile de forma $\frac{\overline{9y7x}}{24}$ unde $\overline{9y7x}$ este număr natural, scris în baza 10.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

V.185. Se dau numerele naturale $\overline{xyzxyz}$ și $\overline{xy0xy}$ scrise în baza 10.

a) Arătați că aceste numere sînt divizibile cu 7, 11 și 13.

b) Arătați că fracțiile $\frac{\overline{xy0xy}}{\overline{xyzxyz}}$ și $\frac{\overline{xy}}{\overline{xyz}}$ sînt fracții echivalente.

c) În cazul cînd $\overline{xy}$ este număr prim aflați z pentru care fracția $\frac{\overline{xy}}{\overline{xyz}}$ este ireductibilă.

d) În cazul cînd $\overline{xy}$ este divizibil cu 3 aflați z pentru care fracția $\frac{\overline{xy}}{\overline{xyz}}$ se poate simplifica prin 3.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

V.186. Scrieți toate fracțiile cu numitorul 112, care sînt cuprinse între $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{5}$. Care dintre acestea sînt ireductibile ?

(Etapa locală, 1985, Constanța)

V.187. Arătați că numărul $x=\frac{10^n+8}{9}$, unde $n \in \mathbf{N}$, este un număr natural.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

V.188.

a) Arătați că produsul a două numere naturale consecutive este un număr par.

b) Arătați că fracția $\frac{2n+1}{n^2+n}$ este ireductibilă pentru orice n număr natural, diferit de zero.

(Etapa locală, 1985, Călărași)

V.189. Suma a trei numere naturale este 72. Aflați numerele știind că primul număr este de trei ori mai mic decît suma celorlalte două, iar diferența dintre al treilea și al doilea este egală cu jumătate din al doilea adunată cu 4.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

V.190. Aflați un număr natural știind că înmulțind-ul cu $\frac{7}{10}$ obținem același rezultat ca atunci cînd scădem din el 60.

(Etapa locală, 1985, Brașov, Bacău)

V.191. Într-o livadă, $\frac{2}{7}$ din numărul total de pomi fructiferi sînt meri, $\frac{3}{5}$ din rest sînt peri, $\frac{3}{4}$ din noul rest sînt caiși, iar restul sînt cireși. Cîți pomi fructiferi sînt în livadă, dacă numărul merilor este cu 337 mai mare decît numărul caișilor ?

(Etapa locală, 1985, Argeș)

V.192. Indicați numărul cel mai mare din următoarele perechi de numere : a) x și x^2 ; b) x și $\frac{1}{x}$ unde x este un număr rațional strict pozitiv diferit de numărul 1.

(Etapa locală, 1985, Călărași)

V.193. Aflaţi numărul raţional astfel încît împărţind $\frac{10}{9}$ şi $\frac{8}{7}$ la acesta, să obţineţi respectiv numere naturale consecutive.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

V.194. Media aritmetică a 50 de numere este 38. Dacă două numere dintre acestea, anume 45 şi 55 sînt înlăturate, atunci media aritmetică a numerelor rămase este 38,5 sau 37 sau 36,5 sau 36 ? Care este rezultatul corect ?

(Etapa locală, 1985, Argeş)

V.195. Un teren în formă de dreptunghi cu dimensiunile de 88 m şi 60 m trebuie împrejmuit cu un gard de sîrmă aşezată pe 6 rînduri. Pentru construirea acestuia se fixează în pămînt stîlpi aşa încît distanţa, în metri, dintre doi stîlpi consecutivi să fie aceeaşi şi să se exprime printr-un număr natural. a) La ce distanţă unul de altul pot fi aşezaţi stîlpii şi cîţi stîlpi sînt necesari pentru împrejmuirea gardului ? b) Dacă 1 m de sîrmă costă 0,75 lei, cît costă toată sîrma ?

(Etapa locală, 1985, Bacău)

V.196. Un dreptunghi D are lăţimea de 18 cm. Calculaţi lungimea lui D în cazul cînd mărind lungimea lui D cu 3 cm se obţine un dreptunghi cu aria de 1 260 cm^2.

(Etapa locală, 1985, Bihor)

V.197. Se dau 4 beţişoare cu lungimea de 1 dm fiecare, 5 beţişoare cu lungimea de 2 dm fiecare şi 7 beţişoare cu lungimea de 4 dm fiecare. Se poate forma un dreptunghi avînd toate aceste beţişoare cap la cap pe conturul său ?

(Etapa judeţeană, 1986, Buzău)

V.198. Un dreptunghi are lungimea de 5 ori mai mare decît lăţimea. Ştiind că perimetrul este de 120 hm, calculaţi aria dreptunghiului.

(Etapa locală, 1986, Neamţ)

INDICAŢII

V.17. Una din paranteze conţine ca scăzător pe 100^2.

V.18. Daţi factor comun.

V.19. Asociaţi parţial şi apoi daţi factor comun.

V.20. Realizaţi o diagramă.

V.21. Imaginaţi un desen.

V.23. Analizaţi ce reprezintă cantitatea de 2000 kg + 520 kg de orez.

V.24. Aflaţi realizarea totală şi apoi realizarea din trimestrul I.

V.25. Comparaţi într-un desen cele două situaţii.

V.26. Calculaţi costul pixului şi al cărţii.

V.27. Găsiţi întîi numărul de creioane din cele două cutii, în a doua situaţie.

V.28. Problema seamănă cu precedenta. Realizaţi un desen care să reprezinte a doua situaţie din problemă.

V.29. Realizaţi un desen.

V.30. Veţi găsi $a = (900 - 25) : 7$.

V.31. Folosiţi metoda figurativă.

V.33. Atenţie la pagina din stînga şi la cea din dreapta, cînd cartea este deschisă. Cele două numere naturale sînt consecutive, avînd suma egală cu 217.

V.34. Analizaţi desenul :

|———|———|———| vîrsta tatălui }
|———| vîrsta fiului } 48 ani

V.36. Găsiţi întîi cît se scade din fiecare număr.

V.37. Realizaţi un desen pentru situaţia vîrstelor din prezent şi altul pentru situaţia din trecut. b) Aflaţi vîrstele peste 14 ani.

V.38. Figuraţi în desen faptul că numerele sînt consecutive.

V.39. Nu sînt negre, înseamnă că sînt roşii sau galbene. Nu sînt roşii înseamnă că sînt galbene sau negre.

V.40. Aflaţi numărul de mere, de ciocolate şi de bucăţi de turtă dulce.

V.41. Folosiţi metoda desenului (figurativă) pentru a afla mai întîi cîte obiecte sînt din fiecare sortiment.

V.42. Observaţi că de trei ori premiul al doilea este suma totală, de 825 lei.

V.44. Realizaţi o schemă care să vă conducă la calculele necesare.

V.45. Realizaţi un desen unde să puneţi în evidenţă suma economisită cu 80 lei pe lună şi suma economisită cu 100 lei pe lună.

V.46. Ce s-ar întîmpla dacă am lua cîte un elev din fiecare bancă unde am aşezat cîte trei şi i-am aşeza cîte 2 în cele 4 bănci libere ?

V.47. Gîndiţi ce se întîmplă dacă în fiecare bancă s-ar aşeza cîte un singur elev.

V.48. Asemănătoare cu precedenta.

V.49. Folosiţi teorema împărţirii cu rest.

V.50. Folosiţi teorema împărţirii cu rest şi eventual un desen.

V.52. Dacă notăm cu a numărul mare și cu b numărul mic, conform problemei putem scrie că $a = 5 \cdot b + 141$. Acum realizați un desen.

V.53. Diferența lor este 36. Folosiți teorema împărțirii cu rest.

V.54. $a = c_1 \cdot 6 + 5$; $a = c_2 \cdot 5 + 4$ deci $c_1 \cdot 6 + 5 = c_2 \cdot 5 + 4$. Din această egalitate se găsesc $c_1 \in \mathbf{N}$, $c_2 \in \mathbf{N}$.

V.55. Putem scrie $\overline{abc} = \overline{cba} \cdot 2 + 100$ cu condiția ca $a - c = 4$ și $c \neq 0$.

V.56. Cercetați ce se întîmplă dacă ar fi numai apartamente de 2 camere.

V.57. Ce s-ar fi întîmplat dacă s-ar fi vîndut bilete numai de același preț, de exemplu, toate de 4 lei ?

V.58. Ce se întîmplă dacă ar fi numai oi ?

V.59. Folosiți problema anterioară.

V.60. Comparați.

V.62. Comparați cele două situații și aflați prețul unui caiet și apoi al unei cărți. Apoi folosiți metoda ipotezelor.

V.63. Calculați diferența între vitezele celor două mobile.

V.64. Calculăm timpul parcurs de motociclist pînă a ajuns la București și apoi distanța parcursă de biciclist pînă pleacă motociclistul din București.

V.67. Determinați elementele mulțimii M rezolvînd inecuația $4x + 1 < 17$ în mulțimea $\mathbf{N}^*$.

V.69. Găsiți mai întîi elementele mulțimii $A \cup B$. Folosiți un desen.

V.72. Se pornește de la $X \cap Y$.

V.73. Condiția d) poate da mai multe soluții care înseamnă că B are cel puțin un element din mulțimea $\{1, 2\}$.

V.74. a) Se constată că cele 3 mulțimi nu au elemente comune.

V.75. Se pornește de la condiția b).

V.76. $x = 3$; $y = 2$.

V.77. Începeți cu intersecția și apoi cu condiția d).

V.79. Folosiți factorul comun.

V.80. Calculați și aduceți la o formă simplă pe a și pe b.

V.81. x poate fi par sau impar.

V.82. a) Dați factori comuni. b) ; c) Folosiți relația găsită la punctul a).

V.83. Folosiți factorul comun.

V.85. a) Al 5-lea termen este $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$. b) Găsiți ultima cifră a numărului.

V.86. Reformulăm problema astfel: reconstituiţi adunarea:

$$\begin{array}{r} \overline{2abcd}\,+ \\ \overline{abcd3} \\ \hline 83781 \end{array}$$

V.87. Reconstituiţi scăderea $\overline{xy} - \overline{yx} = 45$.

V.90. Reduceţi problema la aflarea numerelor naturale de forma $\overline{abcd}$ şi $\overline{abdc}$ în condiţiile problemei.

V.95. $x + 2 + 3 \cdot y + 6 = 34$.

V.98. Scrieţi multiplii de 7 care au două cifre.

V.99. Adunînd numerele 1, 2, 3, 6 se constată că suma este un număr divizibil cu 3. Atenţie la divizibilitatea cu 6.

V.100. Aplicaţi criteriile de divizibilitate.

V.101. Dacă un număr este divizibil cu 15 atunci el este divizibil cu 5 şi cu 3.

V.102. Pentru a fi divizibil cu 15 trebuie să fie divizibil cu 5 şi cu 3.

V.104. Găsim multiplii lui 6 mai mari ca 10 astfel încît $x \leqslant 20$.

V.105. Dacă un număr este divizibil cu 15 (cu 18) atunci el este divizibil cu 5 şi cu 3 (cu 2 şi 9).

V.106. Vezi problema anterioară căci putem scrie $15 \mid \overline{2x3y}$.

V.107. Un număr este divizibil cu 18 cînd este divizibil cu 2 şi cu 9.

V.108. Dacă un număr este divizibl cu 18 atunci este divizibil cu 2 şi 9.

V.109. Trebuie să găsiţi numerele divizibile cu 18 de forma $\overline{a90b}$.

V.110. Dacă un număr este divizibil cu 4 şi cu 9 atunci este divizibil cu 36.

V.112. Folosiţi întîi condiţia c) iar din a), faptul că este număr par.

V.113. Dacă un număr este divizibil cu 45, atunci el este divizibil cu 5 şi cu 9.

V.114. Un număr divizibil cu 45 este divizibil cu 5 şi cu 9.

V.115. Dacă un număr este divizibil cu 45 atunci el este divizibil cu 5 şi 9.

V.116. Ca N să fie divizibil cu 156 trebuie să fie divizibil cu 4 şi cu 39.

V.117. Stabiliţi ultima cifră la următoarele puteri: 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9... Ce observaţi?

V.118. Reluaţi problema anterioară.

V.119. Este mai comod să scriem $n^5(n+5)^3 = [n(n+5)]^3 \cdot n^2$. Întocmiţi un tabel cu următoarele coloane : n ; $n+5$; $n(n+5)$; $[n(n+5)]^3$; n^2 ; $[n(n+5)]^3 \cdot n^2$.

V.120. a) Un zerou se poate obţine din produsul $2 \cdot 5 = 10$. b) Seamănă cu problema anterioară.

V.121. Atenţie la ultima cifră.

V.122. Analizaţi ultima cifră a numerelor 1986^{1986}, 1987^{1987}, 1988^{1988}.

V.123. Cercetaţi modul de rezolvare a problemei anterioare.

V.124. Cercetaţi ultima cifră (cifra unităţilor) a numărului N, observînd ultima cifră la puterile numerelor naturale.

V.126. Folosiţi cunoştinţele despre operaţiile cu puteri.

V.127. Daţi factor comun pe 3^{n+1}.

V.128. Dacă E este divizibil cu 2 şi cu 9 atunci E este divizibil cu 18.

V.129. a) Observaţi că $10^n = 100...000$ b) Trebuie să se demonstreze că e divizibil cu 4 şi cu 9.

V.130. Scrieţi numărul a ca un produs de factori egali cu divizorii lui 1980.

V.131. $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 396$.

V.132. a) Operaţiile cu numere naturale conduc la numere naturale ; b) daţi factor comun ; c) dacă un număr divide o sumă şi toţi termenii cu excepţia unuia, atunci trebuie să-l dividă şi pe acesta.

V.133. Divizibilitatea cu 30 conduce la divizibilitatea cu 10, adică la numărul de forma $\overline{abc0}$; din $a + d = 3$, obţinem $a = 3$.

V.134. Descompuneţi numărul 2772 în factori.

V.135. Scriem $x = \overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1\,000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1\,001$.

V.136. Se scrie numărul $x = \overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10\,101$.

V.137. Un număr natural n, admite ca divizori improprii pe 1 şi pe n.

V.139. $a = 6a_1$; $b = 6b_1$; $c = 6c_1$; $6a_1 \cdot 6b_1 \cdot 6c_1 = 12\,096$ etc.

V.140. Scriem cele două numere astfel : $a = 5 \cdot a_1$ şi $b = 5 \cdot b_1$ unde a_1 şi b_1 sînt numere naturale prime între ele.

V.141. Aplicăm teorema împărţirii cu rest, notînd cu a împărţitorul şi cu b, c, d cîturile respective.

V.142. Aplicaţi pentru fiecare număr teorema împărţirii cu rest şi apoi folosiţi cel mai mare divizor comun.

V.143. Aflaţi cel mai mare divizor comun al numerelor $2\,435 - 35$; $342 - 42$; $4\,527 - 27$.

V.144. Vă ajutaţi de cel mai mic multiplu comun al numerelor 20, 50 şi 70.

V.145. Numărul de piese este un multiplu comun de 2, 3, 4, 5, 6, plus unu și multiplu de 7.

V.146. Seamănă cu problema precedentă.

V.147. În loc să afirmăm că împărțim un număr la 7 și obținem restul 6 putem să spunem că acel număr este multiplu de 7 plus 6 sau multiplu de 7 minus 1. Asemănător cu celelalte.

V.148. Aplicați cunoștințele despre cel mai mic multiplu comun a două numere.

V.149. Folosiți întîi condiția b).

V.150. Calculați.

V.151. Folosim divizorii naturali, de o singură cifră, ai lui 14.

V.152. Falsă.

V.153. Folosiți un desen.

V.154. Suma a două numere naturale impare este număr par, suma a două numere naturale pare este tot un număr par. Numărul 24 735 este impar provenit din adunare cu un termen impar deci celălalt termen trebuie să fie par.

V.155. Regula de la problema precedentă este adevărată și în cazul diferenței de numere naturale. Descăzutul este par și rezultatul, 1 000, este tot par, deci scăzătorul (număr prim) trebuie să fie și el par.

V.156. Singurul număr natural prim de două cifre identice este numărul 11. De ce ?

V.157. Putem scrie $a = 6 + b$. Prima relație devine : $6 + b + b - c = 1\,986$ adică $6 + 2b - c = 1986$ sau $2b - c = 1980$ sau $2b = 1980 + c$.

V.158. $10b$ este număr par, $12c$ este număr par, 82 este număr par deci și $a + 10b + 12c$ este par. Rezultă că a trebuie să fie par, dar și prim.

V.159. Un număr prim diferit de 2 este un număr impar. Cercetați suma de numere prime, numărul lor fiind par.

V.160. Putem scrie relațiile $(x + 1)\cdot y \cdot z = xyz + 30$ și $x(y - 1)\cdot z = xyz - 20$. Folosim faptul că z este număr prim. Se observă că z este divizor comun al numerelor $xyz + 30$ și $xyz - 20$.

V.161. Arătați că numărul prim cu cifrele egale nu poate să fie de forma aaa, iar că unul este răsturnatul celuilalt, numai de forma $1a1$.

V.162. Numerele să nu aibă divizor comun nici pe 2, nici pe 3, nici pe 4, nici pe 6 și nici pe 12.

V.163. $2\,310 = 2\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 11$. Deci $\overline{179x}$ nu trebuie să fie divizibil cu 2, cu 5, cu 3, cu 7, cu 11.

V.164. $3p = q : 2$; $2r = p + q$; $p + q + r = 21$.

V.165. Unul din numere este $54 : 3 = 18$. Suma celorlalte două numere este $54 - 18 = 36$.

V.166. Scrieţi toate numerele de cifre a, b, c.

V.167. Numerele sînt : $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bca}, \overline{bac}, \overline{cab}, \overline{cba}$.

V.168. Numărul poate fi de forma $\overline{a(a+1)(a+2)}$ sau $\overline{(a+2)(a+1)a}$.

V.169. Dacă dorim să punem în evidenţă cifra unităţilor unui număr natural, putem să-l scriem astfel : $10 \cdot n + u$ unde n este un număr natural oarecare iar u este cifra unităţilor numărului respectiv. Exemplu : $3\,427 = 10 \cdot 342 + 7$. Avem deci : $10n + u = 7u$.

V.170. Observaţi că $x \mid 5$ sau $x \mid 12$ sau $x \mid 15$.

V.171. m şi n numere naturale, înseamnă că m^2 şi $n + 1$ sînt numere naturale. Rezultă că m^2 şi $n + 1$ sînt divizori naturali ai lui 800.

V.172. $a^b \cdot c = 13$, deci c este divizor natural al lui 13.

V.173. Notăm cu x, y, z cele trei numere. Avem $P = 18x^3$ şi $S = 10\ x$.

V.174. Ca fracţiile să fie echivalente trebuie să avem : $\frac{2}{a} = \frac{5}{3}$.

V.175. $15 < 2 \cdot n$ şi $12n < 105$ şi $n \in \mathbf{N}^*$.

V.176. $3n^2 < 40$ şi $20 < 3n^2$.

V.177. a) Folosiţi scrierea cu puteri ale lui 10.

V.180. Efectuaţi întîi calculele din parantezele propoziţiei a).

V.184. Se găsesc numerele $\overline{9x7y}$ care nu sînt divizibile cu divizorii primi ai lui 24, adică cu 2 şi 3.

V.185. Se scrie, de exemplu : $\overline{xyzxyz} = \overline{xyz} \cdot 1\,000 + \overline{xyz}$.

V.186. Găsiţi $x \in \mathbf{N}$ astfel încît $\frac{1}{6} < \frac{x}{112} < \frac{1}{5}$.

V.187. Folosiţi criteriul de divizibilitate cu 9.

V.188. a) Două numere naturale consecutive se notează : n şi $n + 1$. Avem două cazuri : n este număr natural par sau n este număr natural impar.

b) Scrieţi fracţia astfel : $\frac{n + (n + 1)}{n(n + 1)}$

V.189. Aflaţi întîi primul număr.

V.190. A înmulţi un număr cu $\frac{7}{10}$ înseamnă a găsi cît reprezintă fracţia $\frac{7}{10}$ din acel număr. Folosiţi metoda grafică.

V.191. Sintetizați datele problemei într-un desen.

V.192. Sînt două cazuri $x < 1$ și $x > 1$. Pentru a compara două numere comparăm diferența lor cu zero.

V.193. Fie $\frac{a}{b}$ numărul cerut. Avem $\frac{8}{7} \frac{a}{b} - \frac{10}{9} \frac{a}{b} = 1$.

V.194. Se poate calcula suma celor 50 de numere.

V.195. a) Aplicați cunoștințele despre cel mai mare divizor comun a două numere.

V.196. Calculați aria dreptunghiului care se formează în cazul cînd mărim lungimea lui D.

V.197. Da. Calculați semiperimetrul dreptunghiului care se poate forma.

V.198. Calculați semiperimetrul și formați o ecuație.

CLASA A VI-A

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

VI.A.1. Arătaţi că numerele de forma $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$, cu $n \in \mathbf{N}^*$, se divid cu 10.

(Etapa judeţeană, 1986, Mureş)

VI.A.2. Se dă fracţia ireductibilă $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbf{N}^*)$. Să se demonstreze că fracţia $\frac{a+b}{a}$ este, de asemenea, ireductibilă.

(Etapa judeţeană, 1986, Brăila)

VI.A.3. Să se afle cîtul şi restul împărţirii numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 15 + 20$ la 182.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VI.A.4. Să se demonstreze că nu există nici un număr care, împărţit la 10, să dea restul 3 şi, împărţit la 15, să dea restul 4.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

CAPITOLUL II

RAPOARTE ŞI PROPORŢII

VI.A.5. Se dă $\frac{a}{b} = 0{,}6$. Să se afle $\frac{2a + 3b}{3b}$.

(Etapa locală, 1986, Braşov)

VI.A.6. Se consideră numărul întreg $n = 1986^2 - 1986 - 1985$. Să se afle x din proporţia :

$$\frac{\frac{x}{1985}}{5} = \frac{397}{n}$$

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

VI.A.7. Aflaţi x din proporţia : $\frac{x}{2}=\frac{\overline{4a6}}{5}$, ştiind că $\overline{4a6}$ este un număr scris în baza 10, divizibil cu 9.

(Etapa locală, 1986, Mureş, Braşov)

VI.A.8. Să se afle x din proporţia $\frac{x}{2}=\frac{\overline{4a6}}{b}$, ştiind că $\overline{4a6}$ este un număr de trei cifre, divizibil cu 9, iar $b=9+(-1)-(-7)+$ $+(-15)-(-5)$.

(Etapa locală, 1986, Bihor)

VI.A.9. a) Simplificaţi fracţia $F=\frac{123123\ldots123}{321321\ldots321}$ (fiecare cifră a numărătorului şi numitorului se repetă de 10 ori).

b) Presupunînd $\frac{a}{b}=F=\frac{41}{107}$, arătaţi că $\frac{3a-b}{b-2a}$ este pătrat perfect.

(Etapa judeţeană, 1986, Brăila)

VI.A.10. Să se arate că, dacă $\frac{3}{a}=\frac{4}{b}=\frac{12}{c}=13$, atunci :

1) $(3-a)\cdot a+(4-b)\cdot b+(12-c)\cdot c=12$;
2) $(3+a)\cdot a+(4+b)\cdot b+(12+c)\cdot c=14$;
3) $a^2+b^2+c^2=1$.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VI.A.11. Determinaţi numerele x, y, z, ştiind că sînt direct proporţionale cu 3, 4 şi 5 şi că $x+z=24$.

(Etapa locală, 1986, Călăraşi)

VI.A.12. Să se găsească patru numere x, y, z, t, ştiind că sînt îndeplinite simultan condiţiile :
a) numerele sînt proporţionale respectiv cu 2, 3, 5, 7 ;
b) $7x+5y+3z+2t=116$.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.A.13. Să se afle numerele a, b şi c ştiind că :

$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}$ şi $abc=576$; $a, b, c\in\mathbf{N}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Caraş-Severin)

VI.A.14. Calculaţi x, y, z, ştiind că sînt proporţionale cu 3, 2, 4 şi produsul lor este **192**.

(Etapa judeţeană, 1986, Dîmboviţa)

VI.A.15. Se dau numerele naturale nenule a, b, c şi d astfel încît $b=2a$, $3b=2c$, $4c=3d$. Se cere :
a) să se arate că $b=ad$;
b) să se afle a, b, c şi d, ştiind că $a+b+c+d=48$.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

VI.A.16. Aflaţi măsurile unghiurilor unui triunghi isoscel, ştiind că două dintre ele sînt proporţionale cu 1 și 4.

(Etapa județeană, 1986, Caraş-Severin)

VI.A.17. O sumă de bani între 500 şi 600 lei a fost plătită în bancnote de 10 și 25 lei. Raportul dintre numărul bancnotelor de 10 lei şi al celor de 25 lei este 3/4. Să se afle suma de bani, numărul bancnotelor de 10 lei și numărul bancnotelor de 25 lei.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VI.A.18. Trei elevi au primit la un concurs de matematică premii în obiecte ale căror valori sînt proporţionale cu numerele 8, 7 și 5. Să se afle valoarea fiecărui premiu, ştiind că 1/5 din valoarea premiului întîi este cu 48 de lei mai mare decît 1/7 din valoarea premiului al doilea.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VI.A.19. Se consideră patru numere pozitive A, B, C, D despre care știm următoarele :

a) dacă înmulţim pe A cu 5, obţinem același rezultat ca atunci cînd înmulţim pe 7 cu B ;

b) C este egal cu 60% din B ;

c) raportul dintre C și D este 1,5.

Să se arate că A, B, C, D sînt invers proporţionale cu numerele : 0,(142857) ; 0,2 ; 1/3 ; 0,5.

(Etapa locală, 1986, Bihor)

VI.A.20. Doi muncitori primesc pentru o lucrare suma de 3 444 lei. Primul muncitor a lucrat 15 zile, iar al doilea 12 zile. Cît a primit fiecare muncitor, ştiind că primul muncitor primește pe zi cu 25% mai mult decît primește al doilea ?

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VI.A.21. La o primă sortare a 50 t legume pierderile au fost de 10%. După a doua sortare au rămas 43,2 t legume. Să se afle cît la sută din cantitatea de legume iniţială reprezintă pierderile din a doua sortare.

(Etapa locală, 1985, Brăila)

CAPITOLUL III

NUMERE ÎNTREGI. NUMERE RAȚIONALE

VI.A.22. Care număr este mai mare : 3^{34} sau 2^{51} ?

(Etapa locală, 1986, Dolj)

VI.A.23. Care dintre numerele $a = 2^{52}$ și $b = 3^{35} - 9^{17}$ este mai mare ?

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

VI.A.24. Se consideră numerele :

$a = 2^{69}$;

$b = (2^{100} - 2^{99} + 9^{34} : 3^{67} - 2^{99})^{46}$.

Stabiliți care dintre numerele a și b este mai mare.

(Etapa județeană, 1984, Giurgiu)

VI.A.25. Se dau numerele :

$A = 16 \cdot 11^4 - 22^4 + 1$;

$B = 27 \cdot 11^3 - 33^3 + 2$.

Se definesc apoi numerele :

$C_0 = (A - B)^0$; $C_1 = (A - B)^1$; . . . ; $C_k = (A - B)^k$, $k \in \mathbf{N}$.

Să se calculeze $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_k$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VI.A.26. Efectuați :

$$[0,(3) + 2,(45) + 0,1(26)] : \left(\frac{1}{3} + 2\frac{5}{11} + \frac{25}{198}\right) - 1986.$$

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VI.A.27. Calculați :

$a = 13^9 - 14 \cdot 13^8 + 14 \cdot 13^7 - 14 \cdot 13^6 + \ldots - 14 \cdot 13^2 + 14 \cdot 13 - 1$.

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

VI.A.28. Să se calculeze : $x = a - (b + c)$ pentru $a = 9$, $b = -3$, $c = -5$ și apoi pentru $a = -1$, $b = -8$, $c = 16$.

(Etapa locală, 1986, Brașov)

VI.A.29. Fie numerele :

$A = [(-1)^{1985} \cdot (-1)^{1986}]^3 \cdot a$, $a \in \mathbf{Z}$ și

$B = (-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + [(-1)^n]^2 + (-1)^n \cdot (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Determinați valorile lui a astfel încît A și B să fie numere opuse.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VI.A.30. Să se arate că dacă $m, n, p \in \mathbf{N}$, atunci :

$(-1)^m \cdot \frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{3} + (-1)^p \cdot \frac{1}{6} \in \mathbf{Z}$ dacă și numai dacă $n + p$ este număr par.

(Etapa județeană, 1986, Bihor)

VI.A.31. Fie $A = \{-2, -1, 0, 4\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N} \mid |x| \leqslant 2\}$. Determinați perechile (x, y), cu $x \in A$ și $y \in B$, astfel încît $x + y > 0$ și $xy \leqslant 0$.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VI.A.32. Se consideră numerele reale nenule a, b, c, d, astfel încît $6a = 27b = 54c = 36d = x(a + b + c + d)$. Arătați că $x = 4$.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VI.A.33. Să se determine ultima cifră a numerelor :

$N_1 = (-5)^{1983} + 1981^{1983}$;

$N_2 = 5^{1983} + 1981^{1983}$.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.A.34. Suma a două numere naturale este 126, iar produsul lor 3393. Să se afle suma inverselor acestor numere.

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

VI.A.35. Să se calculeze :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k : \frac{2^{k+1} + 6^{k+1}}{3^{k+1}(1 + 3^{k+1})}, \text{ unde } k \in \mathbf{N}^*.$$

(Etapa locală, 1986, Dolj)

VI.A.36. Se dau proporțiile :

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \text{ și } \frac{b}{4} = \frac{c}{5}, \ a, \ b \in \mathbf{Z}.$$

a) Să se determine k și p astfel încît să avem : $\frac{a}{8} = \frac{b}{k} = \frac{c}{p}$.

b) Dacă $k = 12$ și $p = 15$, să se determine a, b, c, în cazurile :

1) $a + b + c = 70$;

b) $ab + bc = 69$;

3) $a^2 + b^2 + c^2 = 433$.

(Etapa județeană, 1986, Bihor)

CAPITOLUL IV

ECUAȚII

VI.A.37. Rezolvați ecuația : $\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{xz} = 246$, numerele fiind scrise în baza 10.

(Etapa județeană, 1985, Gorj)

V.A.38. O cooperativă a însămînțat 1300 ha cu grîu, ovăz, orz și secară. Grîu s-a semănat de trei ori mai mult decît orz, orz de două ori mai mult decît ovăz, iar ovăz de patru ori mai puțin decît secară. Să se afle ariile însămînțate cu fiecare cultură în parte.

(Etapa locală, 1986, Brașov)

VI.A.39. Să se determine toate perechile de numere naturale m și n pentru care : $m^2 \cdot (n + 1) = 800$.

(Etapa locală, 1986, Covasna)

VI.A.40. Cu n număr natural, să se rezolve în numere întregi ecuaţia :

$$x(1-y)\cdot(-1)^{n+1}-y(-1)^{n}-x(-1)^{n+2}+1=0.$$

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VI.A.41. Să se determine numerele prime a, b, c, d pentru care avem : $2a+3b+4c+56d=206$.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

VI.A.42.

a) Ştiind că $\frac{7a-2b}{5a+4b}=\frac{2}{15}$, să se determine $\frac{a}{b}$;

b) Ştiind că $\frac{a}{b}=0,4$, să se determine $\frac{9a-2b}{5a+6b}$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VI.A.43. Rezolvaţi ecuaţia : $|x-3|=5$.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

VI.A.44. Rezolvaţi ecuaţia : $\frac{x+1}{1}-\frac{1}{2x+2}-\frac{1}{3x+3}-\frac{1}{6x+6}=0.$

(Etapa locală, 1984, Vîlcea)

VI.A.45. Să se determine x din egalităţile : $4a=20b=25c=50d=$ $=x^2(a+b+c+d)$, ştiind că a, b, c, d sînt numere reale nenule.

(Etapa judeţeană, 1986, Constanţa)

INDICAŢII

VI.A.1. Folosim formula : $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$.

VI.A.2. Ce se întîmplă dacă p ar fi un divizor comun al numerelor a şi $a+b$?

VI.A.3. Folosiţi teorema împărţirii cu rest scrisă astfel : $\frac{D}{I}=C+\frac{R}{I}$.

VI.A.4. Folosiţi teorema împărţirii cu rest.

VI.A.5. Calculaţi $\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}$.

VI.A.6. Calculaţi mai întîi pe n.

VI.A.7. Aflaţi întîi numărul $\overline{4a6}$.

VI.A.8. Calculaţi pe b şi apoi pe $\overline{4a6}$.

VI.A.9.

a) 123 este factor al numărătorului, iar 321 este factor al numitorului.

b) Folosiţi proporţiile derivate.

VI.A.10. Aflaţi pe a, b, c.

VI.A.11. Aplicaţi proprietatea şirului de rapoarte egale.

VI.A.12. Scrieţi un şir de rapoarte egale.

VI.A.13. Observaţi că : $\frac{a^3}{b^3} = \frac{abc}{3.4.6}$.

VI.A.14. Formaţi un şir de rapoarte egale.

VI.A.15. Exprimaţi b, c, d cu ajutorul lui a.

VI.A.16. Formaţi un şir de rapoarte egale. Sînt două cazuri !

VI.A.17. Folosiţi proporţii derivate.

VI.A.18. Formaţi un şir de rapoarte egale.

VI.A.19. Găsiţi trei egalităţi între A şi B, C şi B, C şi D.

VI.A.20. Notaţi cu x suma primită zilnic de al doilea muncitor.

VI.A.21. Calculaţi numărul de tone după prima sortare.

VI.A.22. Transformaţi puterea lui 3 în putere a lui 9 şi puterea lui 2 în putere a lui 8.

VI.A.23. Scrieţi numerele a şi b în aşa fel încît să apară puteri ale lui 8 şi 9.

VI.A.24. Numărul $b = 3^{46}$. Comparaţi cu exerciţiul precedent.

VI.A.25. Calculaţi întîi pe A şi B.

VI.A.27. Grupaţi convenabil şi daţi factor comun parţial.

VI.A.29. Calculaţi pe A. Pentru calculul lui B analizaţi n par şi apoi n impar.

VI.A.30. Pentru a arăta echivalenţa „$\Leftrightarrow$", vom arăta două implicaţii „$\Rightarrow$" ; „$\Leftarrow$".

VI.A.31. Determinăm mulţimea B.

VI.A.32. Se scriu b, c, d cu ajutorul lui a.

VI.A.33. Cercetaţi ultima cifră a lui 5^n şi apoi a unui număr cu cifra unităţilor 1.

VI.A.34. Notăm cu a și b numerele și avem de calculat

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

VI.A.35. Dați factor comun la numărător și la numitor.

VI.A.36.

a) Folosiți proporții derivate.

b) Aplicați proprietatea șirului de rapoarte egale.

VI.A.37. Ecuația se mai scrie : $2\cdot\overline{xy}+11y=246$. Se observă că y este număr par.

VI.A.38. Formați o ecuație cu necunoscuta x care să reprezinte suprafața cu ovăz.

VI.A.39. Scrieți numărul 800 sub forma descompusă.

VI.A.40. Considerați două cazuri : a) n par și b) n impar.

VI.A.41. $3b=206-2a-4c-56d$. Observați că membrul drept este număr par, deci b este număr par și prim.

VI.A.42. Aplicați proprietățile proporțiilor derivate.

VI.A.43. $|a|=a$ dacă $a\geqslant 0$; $|a|=-a$ dacă $a<0$.

VIA.44. Se dă factor comun $\frac{1}{x+1}$ și se obține ecuația de tipul $0\cdot y=0$.

VI.A.45. Scrieți b, c, d cu ajutorul lui a.

GEOMETRIE*

CLASA A VI-A

CAPITOLUL I

PUNCTE ; SEGMENTE DE DREAPTĂ ; UNGHIURI ; TRIUNGHIURI ; SUMA UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI

VI.G.1. Pe o dreaptă d se iau punctele A, B, C, D astfel încît $AB = a$ cm, $AC = b$ cm, $BD = c$ cm, $BC = (a+b)$ cm, $CD = (a+b-c)$ cm și $AD = (c-a)$ cm, iar numerele a, b și c îndeplinesc condițiile $c > a$ și $a + b > c$. În ce ordine sînt așezate aceste puncte ?

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VI.G.2. Să se arate că dacă A, B, C, D sînt puncte așezate (situate) pe o dreaptă în ordinea A, B, C, D *atunci :*

a) $AC + BD = AD + BC$;

b) $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

VI.G.3. Două unghiuri adiacente au bisectoarele perpendiculare. Să se afle măsura fiecărui unghi, știind că măsura unuia dintre ele este de cinci ori mai mare decît a celuilalt.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.G.4. Se dă unghiul AOB mai mic decît un unghi drept. Prelungim latura OA cu semidreapta OE. De aceeași parte cu latura OB se duc : OC perpendiculară pe OA și OD perpendiculară pe OB. Știind că măsura unghiului DOE este de două ori mai mare decît unghiul AOB, să se calculeze măsurile unghiurilor DOE și EOF, unde OF este bisectoarea unghiului AOD.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.G.5. Dacă într-un triunghi ABC avem $AB \equiv AC$ și dacă M și N sînt mijloacele segmentelor AB și AC, atunci $MC \equiv MB$.

(Etapa locală, 1985, Brașov)

VI.G.6. Fie I punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului echilateral ABC. Bisectoarea unghiului A intersectează pe BC în punctul D, iar bisectoarea unghiului BIA intersectează pe AB în E.

Să se arate că triunghiurile BID, BIE, EAI sînt congruente.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

---

* NOTĂ : În această lucrare se folosesc notațiile din manualele în vigoare în anul școlar 1987/1988.

VI.V.7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) \equiv 90°$) în care se duce mediana AM ($M \in BC$). Arătați că :

a) bisectoarea unghiului B este perpendiculară pe AM dacă măsura unghiului $\widehat{B}$ este de $60°$ și reciproc dacă bisectoarea unghiului B este perpendiculară pe AM atunci măsura unghiului B este de $60°$;

b) oricum am alege un punct P pe dreapta AM nu putem forma un triunghi cu segmentele AP, PM și BM.

(Etapa locală, 1985, Argeș)

VI.G.8. Fie ABC un triunghi isoscel $AB \equiv AC$. Pe latura AB se ia un punct M între A și B și pe AC între A și C un punct N unde $BM \equiv CN$, $BN \cap CM = \{P\}$. Demonstrați că :

a) $BN \equiv CM$;

b) $PB \equiv PC$;

c) AP bisectoarea unghiului A.

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

VI.G.9. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C, D (în această ordine) astfel încît $AB \equiv BC \equiv CD$. Fie E un punct exterior dreptei d, astfel încît $\widehat{EAD} \equiv \widehat{EDA}$. În triunghiul EAD se construiesc medianele AF ($F \in ED$) și DP ($P \in AE$). Să se arate că :

a) $AF \equiv DP$;

b) $\triangle APB \equiv \triangle DFC$;

c) $\widehat{BPE} \equiv \widehat{CFE}$;

d) $\triangle PBE \equiv \triangle FCE$.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VI.G.10. În triunghiul ABC, bisectoarele unghiurilor B și C întîlnesc laturile triunghiului în M și N și sînt congruente ($BM \equiv CN$). Știind că perimetrul triunghiului este 49 și raportul a două laturi este 0,8, să se afle laturile acestui triunghi.

(Etapa județeană, 1986, Arad)

VI.G.11. Fie triunghiul ABC ; pe prelungirile laturii BC se construiesc segmentele $BD \equiv AB$ ($B \in$ segmentului DC) și $CE \equiv CA$ ($C \in$ segmentului BE). În triunghiurile isoscele ABD și ACE ducem înălțimile BF și CG și notăm cu J intersecția lor ($F \in AD$ și $G \in AE$).

Să se arate că AJ reprezintă bisectoarea unghiului BAC.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VI.G.12. În triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$) notăm cu M, N, P, respectiv mijloacele laturilor AB, AC, BC.

a) Demonstrați că bisectoarea unghiului MPN trece prin mijlocul segmentului MN.

b) Știind că $AB \equiv AC \equiv 4$ cm, găsiți două valori pentru lungimea segmentului BC astfel încît să se poată construi triunghiul ABC.

c) Cunoscînd că baza $BC \equiv 4$ cm, găsiţi două valori pentru măsura $\widehat{ABC}$, astfel încît să se poată construi triunghiul isoscel ABC. Sînt mai multe asemenea valori ?

(Etapa judeţeană, 1986, Botoşani)

VI.G.13. Un unghi exterior unui triunghi isoscel este de 30°. Să se afle unghiurile triunghiului.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

VI.G.14. Dacă măsurile unghiurilor unui triunghi sînt direct proporţionale cu numerele 1, 2 şi 3 atunci triunghiul este dreptunghic.

(Etapa judeţeană, 1986, Gorj)

VI.G.15. Se consideră un triunghi isoscel ABC $(AB \equiv AC)$ cu $m(\widehat{A}) = 40°$. Prelungim segmentul CA dincolo de A cu un segment AD, $AD \equiv AC$.

1) Arătaţi că triunghiul DBC este dreptunghic.

2) Dacă mărim măsura unghiului A cu 10°, triunghiul DBC rămîne dreptunghic ? Justificare !

(Etapa judeţeană, 1986, Giurgiu)

VI.G.16. Fie F intersecţia înălţimii AD cu bisectoarea BE ale triunghiului dreptunghic ABC $(m\widehat{A}) = 90°$, $D \in BC$, $E \in AC$.

a) Arătaţi că triunghiul AEF este isoscel.

b) Dacă $m(\widehat{C}) = 30°$ atunci triunghiul AEF este echilateral.

(Etapa judeţeană, 1986, Olt)

VI.G.17. În triunghiul ABC, $m(\widehat{C}) = 15°$, $m(\widehat{A}) = p \cdot m(\widehat{B})$, $m(\widehat{B}) = q \cdot m(\widehat{C})$ p, $q \in \mathbf{N}^*$, iar D este piciorul înălţimii duse din vîrful C. Arătaţi că :

a) triunghiul ABC este isoscel ;

b) $CD \equiv \frac{AB}{2}$

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

VI.G.18. În triunghiul ABC, $m(\widehat{A}) = 60°$ şi $m(\widehat{C}) = 70°$. Înălţimea AA' şi bisectoarele BD şi CE se intersectează două cîte două şi anume : $AA' \cap BD = \{N\}$, $CE \cap AA' = \{M\}$, $CE \cap DB = \{P\}$. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiulare MNP şi BNA.

(Etapa locală, 1986, Neamţ)

VI.G.19. În triunghiul ABC înălţimea AD intersectează bisectoarea BE în punctul I $(D \in BC)$, $E \in AC$. Ştiind că triunghiul AEI este echilateral să se afle unghiurile triunghiului ABC.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

VI.G.20. Într-un triunghi ABC cu măsura unghiului B de $60°$ bisectoarea unghiului A intersectează latura BC în punctul D. Perpendiculara dusă pe latura AC în punctul C intersectează prelungirea bisectoarei AD în E. Știind că $m(\widehat{ADB}) = 80°$.

1) Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

2) Ce fel de triunghi este CDE? Justificați!

3) Să se arate că $AD \equiv DE$.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VI.G.21. În triunghiul ABC se duc înălțimea AD și bisectoarea AA' (D ; $A' \in BC$). Știind că $BD \equiv DA'$ să se determine :

a) unghiurile triunghiului ABC știind că $m(\widehat{B}) = \frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C})$;

b)ce raport trebuie să existe între măsurile unghiurilor B și C, astfel ca triunghiul ABC să fie dreptunghic în A ?

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VI.G.22. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD și ACE. Se cere să se demonstreze că :

a) $CD \equiv BE$;

b) dacă notăm $BE \cap CD = \{M\}$, găsiți măsura unghiului BMC.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

VI.G.23. Unghiul B al unui triunghi ABC ($AB \equiv AC$) se împarte în trei unghiuri congruente prin dreptele BD și BE, (E, $D \in AC$) iar D între E și C. Să se afle unghiurile triunghiului ABC pentru care $BD \perp AC$.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VI.G.24. Pe laturile AB și AC ale unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele M, respectiv N astfel încît $BM \equiv AN$. Fie P punctul de intersecție al dreptelor BN și CM.

1) Arătați că triunghiurile BNC și CMA sînt congruente.

2) Calculați măsura unghiului NPC.

(Etapa județeană, 1986, Călărași și Dolj)

VI.G.25. Pe laturile AB și AC ale triunghiului echilateral ABC de latura „a" se iau punctele M, respectiv N, astfel încît $BM \equiv AN$. Segmentele BN și MC se intersectează în P.

a) Calculați unghiul NPC.

b) Calculați AN atunci cînd dreptele MN și BC formează un unghi de $30°$.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

VI.G.26. Fie triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$. În semiplanul determinat de dreapta BC și punctul A ducem semidreapta $BX \perp AB$ și semidreapta $CY \perp AC$ iar pe BX și CY luăm respectiv, punctele M și N, astfel încît $m(\widehat{BMA}) = m(\widehat{CNA}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$. Să se arate că :

a) punctele M, A, N sînt coliniare ;

b) segmentele BN și CM sînt congruente ;

c) segmentele BN și CM se intersectează într-un punct situat pe bisectoarea unghiului BAC.

(Etapa locală, 1985, Caraș-Severin ; județeană, 1986, Gorj)

VI.G.27. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Pe paralela dusă prin A la BC se iau punctele M și N astfel încît $AM \equiv AN$, (M, C de aceeași parte a dreptei AB.

a) Să se demonstreze că $MC \equiv NB$.

b) Să se demonstreze că $BM \equiv NC$.

c) Dacă $MB \cap NC = \{P\}$, să se demonstreze că $AP \perp BC$.

d) Dacă $AM \equiv AC$ să se arate că NC este bisectoarea unghiului ACB, iar $NC \perp MC$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VI.G.28. Într-un triunghi ABC ($AB \equiv AC$) se ia prelungirea laturii AB segmentul $AM \equiv AE$, ($E \in AC$ și E între A și C). Să se arate că $ME \perp BC$.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

VI.G.29. Fie un triunghi ABC astfel încît $m(\widehat{A}) = 60° + m(\widehat{B})$, CF bisectoarea unghiului ACB ($F \in AB$) și FK bisectoarea unghiului BFC ($K \in BC$). Să se arate că :

a) $CF \perp TK$ unde $\{T\} = AK \cap CF$;

b) $AT \equiv TK$;

c) $m(\widehat{FAK}) = 30°$.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

VI.G.30. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Ducem bisectoarele BI și CI ale unghiurilor B și C.

a) Care este măsura unghiului BIC ?

b) Dacă triunghiul ABC este oarecare, exprimați măsura $\widehat{BIC}$ în funcție de măsura $\widehat{BAC}$.

c) Prin I se duce o dreaptă $MN \parallel BC$ ($M \in AB$, $N \in AC$). Să se arate că $MB + NC = MN$.

d) Dacă $AB = 20$ cm și $AC = 15$ cm, calculați perimetrul $\triangle AMN$.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VI.G.31. Se consideră triunghiul echilateral *ABC*. Pe laturile *AB* şi *AC* se construiesc în afară triunghiurile dreptunghice şi isoscele *BAD* şi *CAE*. Prelungirile ipotenuzelor *BD* şi *EC* se întîlnesc în *F*. Să se arate că :

a) Triunghiul *DFE* este isoscel.

b) Dreapta *FA* este perpendiculară pe dreapta *DE*.

c) Fie $N \in AF$ astfel încît triunghiul *DEN* să fie echilateral. Să se afle lungimea segmentului *FN* ştiind că perimetrul triunghiului *DEN* este de 21 cm.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.G.32. În triunghiul *ABC*, $m(\widehat{A}) = 90°$, *AD* este înălţime ($D \in BC$) iar *M* este mijlocul segmentului *AB*. Se ştie că $m(\widehat{AMD}) = 120°$ şi că $AC = 10$ cm. Calculaţi lungimea lui *AD*. Justificare !

(Etapa locală, 1985, Braşov)

VI.G.33. Două dintre unghiurile unui triunghi au măsurile de 50° respectiv 60°. Determinaţi măsurile unghiurilor formate cu laturile triunghiului, de paralela dusă prin vîrful unghiului cu măsura cea mai mică la bisectoarea unghiului cu măsura cea mai mare.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.G.34. Fie triunghiul ascuţitunghic *ABC* şi un punct mobil *M* pe *BC*. Se duce $ME \perp AB$ ($E \in AB$) şi se prelungeşte cu $EP \equiv ME$, precum şi $MF \perp AC$ ($F \in AC$) şi se prelungeşte $FQ \equiv MF$.

a) arătaţi că triunghiul *APQ* este isoscel ;

b) aflaţi unghiurile triunghiului *APQ* în funcţie de unghiul *A* al triunghiului *ABC* ;

c) găsiţi şi justificaţi o condiţie ca triunghiul *APQ* să fie echilateral :

d) găsiţi o condiţie ca punctele *A, P, Q* să fie coliniare ;

e) aflaţi poziţia punctului *M* astfel încît lungimea lui *PQ* să fie minimă.

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

VI.G.35. Se consideră triunghiul isoscel *ABC* ($AB \equiv AC$) cu $m(\widehat{A}) = 40°$. Pe laturile *AB* şi *AC* se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale *ABD* şi *ACE*. Se cere să se arate că :

a) dacă *M* este un punct pe înălţimea din *A* a triunghiului *ABC*, atunci $DM \equiv ME$;

b) dreptele *DE* şi *BC* sînt paralele.

(Etapa judeţeană, 1986, Dolj)

VI.G.36. Fie triunghiul isoscel *ABC* ($AB \equiv AC$) şi $DE \parallel BC$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Dacă *BE* şi *CD* se intersectează în *F* demonstraţi că triunghiurile *BFC* şi *DFE* sînt isoscele.

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

VI.G.37. Bisectoarele interioare ale unghiurilor B şi C din triunghiul ABC se intersectează în punctul I. Prin I se duce $MN \| BC$, ($M \in AB$) şi $N \in AC$. Unghiul BIC are 120°, iar $AI \equiv 12$ cm.

a) Aflaţi distanţele punctului I la laturile triunghiului.

b) Demonstraţi că $MB + NC \equiv MN$.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

VI.G.38. Fie triunghiul ABC în care $AB < AC$. Bisectoarea AY a unghiului exterior suplementar unghiului BAC, intersectează prelungirea laturii BC în punctul M. Pe AY se construieşte segmentul $AN = AM$. Bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ intersectează latura BC în D, iar ND intersectează latura AC în E. Demonstraţi că :

a) triunghiul MDN este isoscel ;

b) triunghiurile AMB şi ANE sînt congruente ;

c) $AD \perp BE$;

d) $BE \| MN$.

(Etapa judeţeană, 1986, Mureş)

VI.G.39. În triunghiul ABC, $m(\widehat{C}) = 2\, m(\widehat{B})$, (CD) $(D \in (AB))$ este bisectoarea unghiului C, $DE \| BC$ şi EF $(F \in AB)$ este bisectoarea unghiului DEA. Să se arate că :

a) $EF \| DC$;

b) $\widehat{BDC} \equiv \widehat{DEC}$ şi $\widehat{ADC} \equiv \widehat{AFE}$;

c) triunghiurile DBC, EDC şi FDE sînt isoscele.

(Etapa judeţeană, 1986, Timiş)

VI.G.40. Prin punctele A, B şi C ale unei drepte d, de aceeaşi parte a dreptei d, se iau segmentele $AA' \equiv BC$; $BB' \equiv AC$ şi $CC' \equiv AB$, astfel încît $AA' \| BB' \| CC'$. Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic.

(Etapa judeţeană, 1986, Tulcea)

VI.G.41. Fie M un punct de pe înălţimea AD a unui triunghi ABC şi distanţele DN şi DP la BM şi respectiv CM. Ştiind că triunghiul ABC este isoscel (cu vîrful în A), să se demonstreze că $DN \equiv DP$.

(Etapa judeţeană, 1986, Vrancea şi etapa locală, 1985, Neamţ)

VI.G.42. Fie triunghiul ABC, $E \in BC$, (între B şi C), E' şi E'' simetricele punctului E faţă de AB respectiv AC. Să se arate că punctele E', A şi E'' sînt coliniare dacă, şi numai dacă $m(\widehat{A}) = 90°$.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

VI.G.43. Fie D piciorul bisectoarei unghiului A al triunghiului ABC şi E mijlocul laturii AC. Ştiind că $m(\widehat{A}) = 2\, m(\widehat{B})$ şi că $DE \| AB$, să se afle unghiurile triunghiului ABC.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

VI.G.44. În triunghiul echilateral ABC se duce înălţimea AD şi se prelungeşte BC dincolo de B, cu segmentul $BM \equiv BD$. Fie N mijlocul lui AB. Dreapta MN intersectează pe AD în P. Arătaţi că :

a) $MN \perp AC$.

b) $CP \perp AM$.

(Etapa judeţeană, 1986, Mureş)

CAPITOLUL II

PATRULATERE

VI.G.45. Dacă într-un patrulater convex diagonalele sînt congruente şi două laturi opuse sînt congruente, atunci celelalte două laturi sînt paralele.

(Etapa judeţeană, 1986, Timiş)

VI.G.46. Fie triunghiul echilateral ABC. În interiorul unghiului BAC se duc semidreptele AX şi AY care împart unghiul BAC în trei unghiuri congruente. Pe AX şi AY se iau punctele D, respectiv E astfel încît $AD \equiv AE$, $DE \equiv BC$ şi F pe segmentul AD cu $AF \equiv BC$. Aflaţi măsura unghiului DEF.

(Etapa judeţeană, 1986, Iaşi)

VI.G.47. Fie triunghiul ABC.

a) Dacă $M \in AC$, $P \in AC$, $\frac{AM}{MC} = 2, \frac{AP}{PC} = \frac{1}{2}$

şi N este simetricul lui B faţă de M (adică $M \in BN$ şi $BM \equiv MN$) să se arate că PN şi BC sînt segmente paralele şi congruente.

b) Dacă : $\frac{2 \cdot AB + 3 \cdot AC}{4 \cdot AB - AC} = \frac{5}{3}$

să se arate că distanţa de la B la AC este egală cu distanţa de la C la AB.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

VI.G.48. În triunghiul ABC fie M mijlocul laturii AB. Paralela prin M la BC intersectează paralela prin C la AB în P şi pe AC în N. Fie $R = BP \cap MC$. Arătaţi că punctele R, N şi mijlocul lui BC sînt coliniare.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

VI.G.49. Se prelungesc medianele BN şi CM ($N \in AC$, $M \in AB$) ale triunghiului ABC cu segmentele $NF \equiv BN$ şi $CM \equiv ME$.

Demonstraţi că :

a) $\triangle AME = \triangle BMC$;

b) punctele E, A şi F sînt coliniare ;

c) măsura unghiului B este de 90° dacă, şi numai dacă $BN \equiv CN$.

(Etapa locală, 1985, Iaşi)

VI.G.50. Demonstraţi că mijloacele laturilor oricărui patrulater convex sînt vîrfurile unui paralelogram.

Există patrulatere convexe astfel încît paralelogramul obţinut să fie dreptunghi ? Dar pătrat ?

(Etapa locală, 1985, Călăraşi)

VI.G.51. Să se demonstreze că un paralelogram este dreptunghi dacă, şi numai dacă segmentele care unesc două vîrfuri consecutive cu mijlocul laturii opuse sînt congruente.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

VI.G.52. Fie P un punct situat pe baza BC a triunghiului isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Ducem $BR \perp AC$, $PS \perp AB$ şi $PQ \perp AC$, (R, $Q \in AC$, $S \in AB$). Demonstraţi că $SB \equiv RQ$.

(Etapa judeţeană, 1986, Braşov)

VI.G.53. Pe laturile AB şi AC ale unui triunghi oarecare se construiesc, în afară, pătratele $ABDE$ şi $ACFG$. Arătaţi că :

a) $EC \equiv BG$;

b) $EC \perp BG$.

(Etapa judeţeană, 1986, Călăraşi)

VI.G.54. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$) şi A', B', C' respectiv mijloacele laturilor BC, AC şi AB. Să se arate că :

a) triunghiul $A'B'C'$ este isoscel ;

b) (AA') este bisectoarea unghiului $B'A'C'$.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VI.G.55. Prin mijlocul M al laturii AB al unui triunghi ABC se duce o paralelă la AC care intersectează BC în N şi o paralelă la BC care intersectează AC în P. Să se demonstreze că :

a) triunghiurile AMP şi MBN sînt congruente ;

b) triunghiurile AMP şi MPN sînt congruente ;

c) triunghiurile MPN şi CNP sînt congruente ;

d) $AP \equiv CP$;

e) $MP = \frac{1}{2} BC$.

(Etapa judeţeană, 1986, Sălaj)

VI.G.56. Pe laturile *AB* şi *AC* ale unui triunghi echilateral *ABC* se construiesc în exterior pătratele *ABED* şi *ACFG*.

a) Arătaţi că segmentele *DC* şi *BF* sînt congruente.

b) Demonstraţi că patrulaterul *BCGD* este trapez isoscel.

(Etapa locală, 1985, Argeş)

INDICAŢII

VI.G.1. Aşezarea punctelor pe dreapta *d* să înceapă cu punctul *A* pe care-l considerăm origine. Apoi punctul *B* poate fi aşezat la dreapta sau la stînga punctului *A* şi notăm distanţa $AB \equiv a$. Urmărind această idee şi ţinînd cont permanent de condiţiile din ipoteză, fixăm în continuare şi restul punctelor. Atenţie, sînt două soluţii!

VI.G.2. Scriem că măsura lungimii unui segment este rezultatul sumei măsurilor lungimilor altor segmente.

VI.G.3. Măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri adiacente este de 90°, înseamnă că suma măsurilor unghiurilor adiacente este de 180°.

VI.G.4. Datorită condiţiilor din ipoteză apar două unghiuri cu laturile perpendiculare.

VI.G.5. Comparăm elementele triunghiurilor *MBC* şi *NCB*.

VI.G.6. Evalumă măsurile unghiurilor din jurul punctului *I* ţinînd cont că bisectoarele triunghiului echilateral sînt şi înălţimi şi mediane. De cercetat dacă bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$, *CI* nu este şi bisectoarea unghiului *AIB*.

VI.G.7. a) Se ştie că un triunghi isoscel cu un unghi de 60° este echilateral.

b) Evident, cercetăm mai multe poziţii ale punctului *P* şi apoi vom ţine seama de condiţiile pe care le îndeplinesc trei segmente pentru a putea construi cu ele un triunghi.

VI.G.8. a) Să cercetăm dacă triunghiurile *BMC* şi *CNB* sînt congruente.

b) Folosind o proprietate (reciprocă) a triunghiurilor isoscele, poate dovedim că $PB \equiv CP$.

c) Putem folosi rezultatul de la punctul b. O metodă pentru a dovedi că două unghiuri sînt congruente este metoda „triunghiurilor congruente".

VI.G.9. 1. De fapt ipoteza descrie un triunghi isoscel — ne gîndim la proprietăţi ale triunghiului isoscel.

2. Evident, stabilim cazul de congruenţă.

3. Cercetăm suplementele acestor unghiuri.

4. Evident, stabilim cazul de congruenţă.

VI.G.10. Ştim că într-un triunghi isoscel bisectoarele relative laturilor congruente sînt congruente. Considerăm cunoscută propoziţia „triunghiul în care două bisectoare sînt congruente este triunghi isoscel".

VI.G.11. Ştim că într-un triunghi isoscel înălţimea relativă bazei este şi mediană, deci este şi mediatoarea bazei. Arătînd că $\triangle DJE$ este isoscel $(DJ \equiv JE)$ poate descoperim de ce $\widehat{BAJ} \equiv \widehat{CAJ}$!

VI.G.12. a) Congruenţă de triunghiuri.

b) Un triunghi se poate construi dacă între măsurile lungimilor laturilor se păstrează anumite relaţii de inegalitate.

c) Într-un triunghi isoscel unghiurile congruente sînt ascuţite, drepte sau obtuze ?

VI.G.13. Să calculăm măsura unghiului adiacent şi suplementar unghiului de 30°. Unghiul în cauză, este unghi din vîrful sau de la baza triunghiului isoscel.

VI.G.14. Putem să ne gîndim că măsurile unghiurilor triunghiului sînt $x°$; $y°$; $z°$. Scriem că acestea sînt direct proporţionale cu numerele 1 ; 2 ; 3.

VI.G.15. Să demonstrăm propoziţia : „dacă într-un triunghi măsura unei mediane este jumătate din măsura laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic" (Este o propoziţie reciprocă. Care este propoziţia directă ?). În demonstraţia precedentă notaţi $m(\widehat{A}) = x° \ (0 < x° < 180°)$. Ce observaţi ?

VI.G.16. a) Să evaluăm măsurile unghiurilor triunghiului AEF.

b) $\triangle AEF$ are toate laturile congruente sau este triunghi isoscel cu măsura unui unghi de 60°. Care idee este mai bună ?

VI.G.17. a) Suma unghiurilor unui triunghi ; apoi, dacă $p, q \in \mathbf{N}^*$ şi de exemplu $p \cdot q = 7$, atunci $p = 1$ şi $q = 7$ sau $p = 7$ şi $q = 1$. Atenţie la ipoteza $p, q \in \mathbf{N}^*$.

b) Teorema unghiului de 30° dintr-un triunghi dreptunghic.

VI.G.18. Rezolvaţi două probleme pregătitoare. Presupunînd măsurile unighiurilor triunghiului ABC cunoscute (date) să se calculeze :

a) Măsura unghiului format de bisectoarea unui unghi al triunghiului şi înălţimea care trece prin alt vîrf al triunghiului.

b) Măsura unghiului format de două din bisectoarele triunghiului dat.

VI.G.19. Să calculăm măsura unghiului (ascuţit) format de bisectoarea unghiului unui triunghi şi de o înălţime care nu trece prin acelaşi vîrf cu bisectoarea, sau să folosim faptul că apar unghiuri opuse la vîrf, dar şi un unghi de 90°.

VI.G.20. 1. Ne gîndim la suma măsurilor unghiurilor unui triunghi.

2. Să calculăm măsurile unghiurilor triunghiului CDE.

3. Folosim tranzitivitatea relaţiei de egalitate dintre măsurile segmentelor şi faptul că, prin definiţie, triunghiul isoscel are două laturi congruente.

VI.G.21. a) Cercetăm triunghiul ABA' deoarece înălţimea AD este şi mediană, apoi evaluăm măsurile unghiurilor triunghiului ABC (în ipoteza dată).

b) Ştiind că $m(\widehat{B})+m(\widehat{C})=90°$. Să calculăm şi $m(\widehat{B})-m(\widehat{C})$!

VI.G.22. a) Cercetăm dacă figura nu conţine triunghiuri congruente (convenabil alese).

b) Măsura unghiului BMC este constantă (nu se schimbă) oricare ar fi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

VI.G.23 Presupunem că am reuşit să împărţim unghiul B în trei unghiuri congruente, respectînd şi condiţiile din ipoteză. Fără a calcula măsura unghiului $\widehat{A}$, putem spune : $m(\widehat{A}) \neq 90°$ (de ce ?) ; $m(\widehat{A}) \neq 60°$ (de ce ?) ; $m(\widehat{A}) < 90°$ (de ce ?). Notăm de exemplu $m(\widehat{DBC})=x°$.

VI.G.24. 1. Triunghiul ABC fiind echilateral şi $BM \equiv CN$ rezultă imediat că $AM \equiv CN$, indiferent dacă $N \in AC$, $M \in AB$, sau sînt pe prelungirile laturilor.

2. Triunghiurile CMB şi BNA sînt congruente, iar unghiul CPN poate fi privit ca unghi exterior triunghiului CPB.

VI.G.25. a) Să evaluăm măsura unui unghi exterior unui triunghi, nu înainte însă de a cerceta triunghiurile BNA şi CMB. Aceeaşi remarcă ca la **G.24.**

b) $\triangle RNC$ este dreptunghic !

VI.G.26. a) Să demonstrăm că $m(\widehat{MAN})=180°$.

b) De cîte ori avem de demonstrat congruenţa a două segmente, încercăm, în primul rînd, să dovedim congruenţa a două triunghiuri care conţin segmentele în cauză (metoda triunghiurilor congruente).

c) Dintr-un punct se poate duce pe o dreaptă o perpendiculară şi numai una.

VI.G.27. a) şi b) Vom cerceta dacă perechi de triunghiuri au suficiente elemente respectiv congruente pentru a fi congruente.

c) Dacă AP, care este mediana în triunghiul PNM este şi înălţime în acest triunghi, atunci este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

d) Să arătăm că $m(\widehat{MNC})+m(\widehat{NMB})=90°$.

VI.G.28. Dacă două unghiuri suplementare sînt şi congruente, atunci fiecare din cele două unghiuri are măsura unui unghi drept.

VI.G.29. a) Să evaluăm măsurile unghiurilor triunghiului ABC în funcţie de măsura unghiului $B=x°$, apoi să cercetăm triunghiurile CAF şi CKF.

b) Rezultă din demonstraţia anterioară.

c) Să scriem că măsura unghiului FAK este diferenţa măsurilor altor două unghiuri.

VI.G.30. a) Evident suma măsurilor unghiurilor unui triunghi (ţinînd cont de ipoteza dată).

b) Analog.

c) Drepte paralele intersectate de o secantă, precum şi proprietăţi ale triunghiurilor isoscele.

d) Caz particular al punctului c).

VI.G.31. a) Din ipoteză, triunghiurile dreptunghice şi isoscele *BAD* şi *CAE* sînt congruente. Apoi, de exemplu, se evaluează măsurile unghiurilor *FED* şi *FDE*.

b) Triunghiul *FBC* este isoscel, iar *FA* este bisectoarea unghiului *CFB*, deci...

c) Triunghiurile congruente *DNF* şi *ENF* sînt şi isoscele ?

VI.G.32. În triunghiul dreptunghic *ADB* ($m(\widehat{D}) = 90°$), *DM* este mediană. Ilustrînd grafic triunghiul dreptunghic *ABC*, va trebui să desenăm $AC > AB$. De ce ?

VI.G.33. Evident, este vorba de bisectoarea unghiului de 70° şi paralela dusă prin vîrful unghiului de 50°.

VI.G.34. a) şi b) Să demonstrăm propoziţia : „dacă într-un triunghi înălţimea este şi mediană, atunci triunghiul este isoscel", sau să demonstrăm congruenţa de triunghiuri.

c) Un triunghi echilateral este un triunghi isoscel cu măsura unui unui de 60° (Demonstraţi.) deci $m(\widehat{A}) = ?$

d) *P*, *A*, *Q*, sînt colineare dacă $m(\widehat{PAQ}) = 180°$ şi deci $m(\widehat{BAC}) = ?$

e) Să cercetăm ce reprezintă segmentul *EF* în triunghiul *PMQ*.

VI.G.35. a) Să cercetăm dacă în urma construcţiei indicate de textul problemei, apar triunghiuri congruente.

b) Notăm piciorul înălţimii dusă din *A*, de exemplu *F*. Cercetăm ce reprezintă segmentul *AF* în triunghiul *ADE*.

VI.G.36. Ne gîndim la drepte paralele intersectate de o secantă, dar şi la congruenţa triunghiurilor oarecare.

VI.G.37. a) Drepte paralele tăiate de o secantă, apoi faptul că *BI* şi *CI* sînt bisectoarele unghiurilor *B* şi *C* din $\triangle ABC$.

b) Caz particular cu $m(\widehat{BIC}) = 120°$. Evaluăm suma $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ şi concluzionăm asupra măsurii unghiului *A*. Se duc distanţele de la *I* la laturile *AB* şi *AC*, de unde rezultă şi lungimea comună a distanţelor.

VI.G.38. a) De exemplu comparăm triunghiurile *MAD* şi *NAD*. Putem arăta că triunghiul *MDN* este isoscel şi altfel : arătăm că în acest triunghi *DA* este mediană şi bisectoare, deci, conform unei proprietăţi reciproce a triunghiurilor isoscele...

b) Folosim cazul de congruenţă U.L.U.

c) Dacă am arăta că $AD \perp MN$ şi $AD \perp BE$, atunci $MN \parallel BE$?

VI.G.39. a) De exemplu, dacă două unghiuri sînt congruente şi au două laturi paralele, atunci celelalte două laturi ale celor două unghiuri sînt şi ele paralele (reciprocă).

b) şi c) Notăm $m(\widehat{ABC}) = x°$ şi apoi evaluăm măsurile unghiurilor triunghiurilor isoscele *BDC* şi *DEC* (De ce sînt triunghiuri isoscele ?) În continuare folosim teorema relativă la unghiuri cu laturi paralele.

c) Folosim reciproca : dacă într-un triunghi două unghiuri sînt congruente atunci triunghiul este isoscel.

VI.G.40. Dacă punctele *A, B, C* sînt situate pe dreapta *d*, în această ordine (*B* între *A* şi *C*) să ducem prin *A′* şi *C′* paralele la latura *AC* care intersectează segmentul *BB′* în *A″* şi respectiv în *C″*. Triunghiurile *A′A″B′* şi *C′C″B′* sînt isoscele. Cercetaţi şi situaţia : punctul *A* se află între *B* şi *C*. Propoziţia rămîne adevărată ?

VI.G.41. Congruenţă de triunghiuri. În triunghiuri congruente înălţimile corespunzătoare laturilor congruente sînt congruente. Schimbînd cuvîntul „înălţime“ cu cuvintele „mediană“ sau „bisectoare“, propoziţia precedentă rămîne adevărată ?

Formulaţi şi demonstraţi o reciprocă a problemei propuse.

VI.G.42. Avem de demonstrat două propoziţii : propoziţia directă are ipoteza : În $\triangle ABC$ măsura unghiului *A* de 90° şi punctele *E′* şi *E″* simetricele punctului *E* faţă de laturile *AB* şi *AC* ; concluzia : punctele *E′*, *A* şi *E″* coliniare. Care este propoziţia reciprocă a acesteia ?

VI.G.43. Desenînd corect triunghiul *ABC* ($m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle B)$) cît şi bisectoarea unghiului *A* se observă imediat că triunghiul *ADB* este isoscel. Să cercetăm şi triunghiul *ADC*.

VI.G.44. a) De exemplu, notăm $\{R\} = MP \cap AC$ şi evaluăm măsurile unghiurilor *ANR* şi *NAR*.

b) Să cercetăm ce reprezintă *AD* şi *MR* în triunghiul *CAM* !

VI.G.45. Să încadrăm cele două diagonale, precum şi cele două laturi opuse congruente în două triunghiuri congruente. (Metoda triunghiurilor congruente).

VI.G.46. Presupunem că am construit semidreptele *AX* şi *AY*, astfel încît unghiul *BAC* este împărţit în trei unghiuri congruente. Pentru a fixa punctele $D \in AX$ şi $E \in AY$ ducem din *B* şi *C* perpendiculare pe *BC* ; intersecţia perpendicularelor cu *AX* respectiv *AY* reprezintă punctele *D* şi *E* astfel încît $DE \equiv BC$. De ce ? Evaluăm unghiurile triunghiului isoscel *ADE* şi apoi căutăm două triunghiuri congruente care permit evaluarea unghiului *DEF*.

VI.G.47. a) Deci segmentul *AM* este de două ori mai mare decît segmentul *MC* (*M* între *A* şi *C*), apoi segmentul *AP* de două ori mai mic decît segmentul *PC*. (*P* între *A* şi *C*). Latura *AC* trebuie divizată

într-un număr întreg de diviziuni, care să corespundă condițiilor din ipoteză, după care fixăm punctele P și M. Ne gîndim la triunghiuri congruente sau la proprietăți ale paralelogramului (reciproce).

b) Ne gîndim la proporții derivate cu termeni schimbați. Notăm pentru a ușura calculul, măsurile laturilor $AB = x$ și $AC = y$.

VI.G.48. Textul problemei ne dă în mod direct și ideea. Nu cumva MN este linie mijlocie ? Apoi : punctul de intersecție al diagonalelor unui paralelogram și mijloacele a două laturi opuse sînt colineare ?

VI.G.49. a) și b) Să evaluăm suma măsurilor unghiurilor adiacente, formate în jurul unui punct și de aceeași parte a unei drepte. Ne putem gîndi și la patrulaterul convex în care diagonalele se înjumătățesc.

c) O proprietate caracteristică a triunghiurilor dreptunghice : dacă într-un triunghi o mediană are ca măsură jumătate din măsura laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic și anume vîrful unghiului drept este vîrful unghiului din care pleacă mediana.

d) Trebuie demonstrate două propoziții : directa și reciproca ei. Directa : într-un triunghi dreptunghic, măsura medianei relative ipotenuzei este jumătate din măsura ipotenuzei.

VI.G.50. Figura geometrică cea mai familiară este totuși triunghiul, din care cauză să desenăm o diagonală a patrulaterului convex. Să reținem că un patrulater convex în care diagonalele sînt perpendiculare se numește „ortodiagonal“.

VI.G.51. Considerăm un dreptunghi $ABCD$ și M mijlocul laturii DC. Se demonstrează ușor că $AN \equiv BM$. Putem afirma că orice dreptunghi are următoarea proprietate : unind două vîrfuri consecutive cu mijlocul laturii opuse se obțin două segmente congruente. Mai rămîne de demonstrat că această proprietate o au numai dreptunghiurile (o proprietate caracteristică a dreptunghiurilor).

VI.G.52. Să ducem o dreaptă ajutătoare și anume prin punctul P construim o paralelă la latura AC. Cercetăm figurile obținute.

VI.G.53. a) Vom încadra segmentele EC și BG în două triunghiuri congruente.

b) Să notăm, de exemplu, $EC \cap AB = \{M\}$ și $EC \cap BG = \{N\}$. Triunghiul ENB este dreptunghic.

VI.G.54. a) și b) Congruență de triunghiuri, sau proprietățile liniei mijlocii și apoi patrulatere particulare.

VI.G.55. Reciproca liniei mijlocii într-un $\triangle$ oarecare. Apoi congruențe de triunghiuri (cazul ?), sau definiția paralelogramului.

VI.G.56. a) Evident, ne gîndim întîi la metoda triunghiurilor congruente.

b) În continuare, planul de lucru ar fi : arăt că două din laturile opuse ale patrulaterului $BCGD$ sînt congruente și neparalele, apoi că cele două laturi opuse sînt paralele.

CLASA A VII-A

CAPITOLUL I

ALGEBRĂ

NUMERE ÎNTREGI, RAŢIONALE ŞI IRAŢIONALE

VII.A.1. Calculaţi :

a) $27 \cdot 111^3 - 333^3$

b) $(-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + (-1)^{n+3}$, $n \in \mathbf{N}$

c) $2^n + (-2)^n : 2^n$, $n \in \mathbf{N}$

(Etapa judeţeană, 1986, Braşov)

VII.A.2. Să se demonstreze că numerele :

$72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$ se divid cu 15 oricare ar fi n.

(Etapa judeţeană, 1986, Alba)

VII.A.3. Să se arate că numerele :

$M = 6^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^n \cdot 3^{n+2}$, $n \in \mathbf{N}$, sînt divizibile cu 13.

(Etapa locală, 1984, Giurgiu)

VII.A.4. Arătaţi că nu există nici un număr prim astfel încît suma dintre el şi $n^2 + n$ să fie 1984, unde $n \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1985, Maramureş)

VII.A.5. Fie numerele : $(x - 1)$; $(x - 2)$; $(x - 3)$; ... ; $(x - 50)$.

a) Calculaţi produsul numerelor de mai sus pentru $x = 37$.

b) Pentru ce valori ale lui x suma lor este 25 ?

c) Arătaţi că produsul numerelor de mai sus este acelaşi pentru $x = 0$ şi pentru $x = 51$.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VII.A.6. Dacă n este impar, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere întregi şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ aceleaşi numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ scrise în altă ordine, să se arate că numărul : $(a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)$ este par.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VII.A.7. Să se găsească un număr de două cifre astfel ca raportul între diferenţa şi suma cifrelor sale să fie 2/3.

(Etapa judeţeană, 1983, Buzău)

VII.A.8. Găsiți numărul de două cifre care este egal cu dublul produsului numerelor reprezentate de cifrele sale.

(Etapa locală, 1983, București)

VII.A.9. Să se determine numărul $\overline{abcc}$ în baza 10 astfel încît : $\overline{ab} + \overline{cc} = \overline{b6}$.

(Etapa județeană, 1983, Tulcea)

VII.A.10. Determinați numerele naturale de două cifre $\overline{xy}$, în baza 10, știind că : $4x + 2xy - 3(y + 11) = 0$.

(Etapa județeană, 1983, Teleorman)

VII.A.11. Să se afle toate numerele de două cifre care se divid prin suma cifrelor lor dînd cîtul 4.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VII.A.12. Se consideră toate numerele scrise în baza 10 ce se pot alcătui cu trei cifre distincte a, b, c ($a, b, c \neq 0$).

a) Să se arate că suma lor S nu poate fi un număr prim ;

b) Să se arate ca $1\,332 \leqslant S \leqslant 5\,328$.

(Etapa județeană, 1983, Bacău)

VII.A.13. Să se arate că dacă un număr de patru cifre este egal cu răsturnatul său, atunci el nu poate fi pătrat perfect, dar poate fi cub perfect.

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VII.A.14. Arătați că fracția :

$$\frac{3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} + 6 \cdot 3^n \cdot 5^n}{2^{2n+1} \cdot 3^n + 3^{n+1} \cdot 4^n + 2^{n+1} \cdot 6^{n+1}}$$

se simplifică cu 17 oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1986, Mureș)

VII.A.15. Să se determine x, y, z din șirul de rapoarte egale

$$x - y = \frac{y + z}{4} = \frac{z}{2}, \text{ știind că } x + 2z = 16.$$

(Etapa locală, 1984, Hunedoara)

VII.A.16. Demonstrați că dacă $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$, atunci :

$$\frac{x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \ldots + x_n^{m+1}}{a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \ldots + a_n x_n^m} = \frac{x_1}{a_1}$$

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VII.A.17. Suma a două fracții care au același numărător, 3, este egală cu 39/40. Știind că suma numitorilor este 13, să se afle cele două fracții.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

VII.A.18. Calculați :

$$\text{a) } \frac{2}{9}(-1)^n - \frac{7}{9} - (-1)^{n+1} + 1, \ n \in \mathbf{N}$$

$$\text{b) } \frac{2}{7}(-1)^{k+1} + \frac{7}{3}(-1)^{k+2} + (-1)^{p+3}, \ k, \ p \in \mathbf{N}$$

(Etapa județeană, 1984 Alba ; 1986, Maramureș)

VII.A.19. Fie :

$$E(x) = (-1)^k(x^2 - 3x + 2) + (-1)^{k+1}(x^2 + 6x - 4), \ k \in \mathbf{N}$$

a) Să se calculeze : $E(\sqrt{2})$ și $E(-\sqrt{2})$

b) Să se determine numărul $A = \frac{9}{m_a} + \frac{7}{m_g}$ unde m_a și m_g sînt respectiv media aritmetică și media geometrică a numerelor **pozitive** determinate la punctul a).

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

VII.A.20. Se dau numerele :

$$a = \frac{(-1)^n}{\sqrt{3}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(-1)^{k+2}}{\sqrt{7}}$$

$$\text{și } b = \frac{(-1)^m}{\sqrt{7}} - \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(-1)^{m+2}}{\sqrt{3}}$$

unde m și n sînt numere naturale. Să se calculeze $a \cdot b$.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

VII.A.21. Calculați :

$$\text{a) } \sqrt{2} - \sqrt{(-2)^2} + |1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{8} - 3|$$

b) $|-x| + \sqrt{(x-1)^2} - |4x| + |-2x$, știind că $x = -2$

(Etapa municipală, 1986, București)

VII.A.22. Se dă :

$$x = \sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})} + \sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$$

Să se calculeze x^6.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VII.A.23. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor P_1, P_2, P_3 :

$$P_1 : \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} \notin \mathbf{N}$$

$$P_2 : \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} \in \mathbf{N}$$

$P_3 : \sqrt{5n + 7} \notin \mathbf{N}$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VII.A.24. Să se calculeze :

$$\left[(7+4\sqrt{3})^{1986}+\frac{1}{(7-4\sqrt{3})^{1986}}\right]\cdot\frac{(14-8\sqrt{3})^{1986}}{2^{1987}}.$$

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VII.A.25. Se consideră numerele : $x=\sqrt{5}+\sqrt{29}$ şi $y=\sqrt{58}$. Fără a calcula cei trei radicali, stabiliţi care număr este mai mare, x sau y.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

VII.A.26. Precizaţi dacă numărul : $A=\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{6}$ este negativ, pozitiv sau nul.

(Etapa judeţeană, 1986, Mureş)

VII.A.27. Fie numărul : $a=\sqrt{10-\sqrt{19}}-\sqrt{10+\sqrt{19}}$

a) Numărul a este negativ sau pozitiv ?
b) Arătaţi că : $a^2=2$.
c) Calculaţi $(a+\sqrt{2})^{100}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Vrancea)

VII.A.28. Aşezaţi în ordine crescătoare numerele :

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\ ;\ \frac{1}{2}\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}-\sqrt{k-1},\ k\in\mathbf{N},\ k>1$$

(Etapa judeţeană, 1986, Buzău)

VII.A.29. Să se arate că numărul :

$E=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{6}$ este raţional.

(Etapa judeţeană, 1986, Olt)

CAPITOLUL II

FUNCŢII

VII.A.30. Determinaţi o formulă (lege) f prin care poate fi definită o funcţie pe mulţimea $\{-2, 0, 2\}$ cu valori în mulţimea $\{0, 2, 4\}$ şi reprezentaţi-i graficul.

(Etapa locală, 1986, Călăraşi)

VII.A.31. Reprezentaţi graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x+6, & \text{dacă } x\leqslant -3\\ -x, & \text{dacă } -3<x\leqslant 0\\ x, & \text{dacă } 0<x\leqslant 3\\ -x+6, & \text{dacă } x>3\end{cases}$$

(Etapa judeţeană, 1986, Maramureş)

VII.A.32. Fie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = n^2 - n + 11$

Este adevărat că numerele $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ şi $f(5)$ sînt prime ? Există numere n astfel încît $f(n)$ să nu fie prim ?

(Etapa locală, 1986, Maramureş)

VII.A.33. Fie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = n^2 - n + 7$. Arătaţi că :

a) $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ şi $f(4)$ sînt numere prime.

b) $f(n)$ nu este prim pentru orice număr $n \in \mathbf{N}$

c) $f(n) > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$

(Etapa locală, 1984, Prahova)

VII.A.34. a) Să se reprezinte grafic funcţia :

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

b) Să se afle coordonatele punctelor de pe grafic care au abscisa egală cu ordonata.

(Etapa locală, 1986, Neamţ)

VII.A.35. Să se reprezinte grafic funcţia : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{pentru } x \in [-3, 3]\backslash \mathbf{N} \\ 1 & \text{în rest} \end{cases}$$

(Etapa judeţeană, 1986, Sibiu)

VII.A.36. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-\infty, -1) \\ mx + 2, & x \in [-1, +\infty) \end{cases}$$

a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît $M(1, 7)$ să aparţină graficului funcţiei f şi să se traseze graficul în acest caz.

b) Pentru $m = 5$, $A = \{-1 ; 0 ; -4 ; 3\}$, $B = \{x \in A \mid f(x) \leqslant 7\}$, să se calculeze : $A \cup B$, $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, $A \times B$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VII.A.37. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{pentru } x > 2 \\ ax + 5 & \text{pentru } x \geqslant 2 \ ; \ a, b \in \mathbf{R} \end{cases}$$

a) Determinaţi numerele a şi b ştiind că punctele $A(-2, 4)$ şi $B(3, 4)$ aparţin graficului lui f.

b) Pentru $a = 1/2$ şi $b \equiv 10$ reprezentaţi grafic funcţia.

c) Determinaţi punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f de la punctul b cu axa Ox.

(Etapa locală, 1986, Iaşi)

VII.A.38. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{dacă } x \leqslant 1 \\ -2x + m, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

a) Să se determine valoarea lui m pentru care graficul funcţiei trece prin punctul $M(4, 5)$.

b) Pentru $m = 3$ să se traseze graficul lui f şi să se determine valorile lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care $f(x) \leqslant 0$.

(Etapa locală, 1986, Covasna)

VII.A.39. Fie funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 6$ şi $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2 - x$. Demonstraţi că graficele funcţiilor f şi g sînt perpendiculare.

(Etapa judeţeană, 1985, Vrancea)

VII.A.40. Într-un sistem de axe perpendiculare xOy se consideră punctele $A(-3,0)$; $B(0,3)$; $C(3,0)$. Determinaţi funcţia a cărei reprezentare grafică este reuniunea segmentelor AB şi BC.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VII.A.41. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + a$, $a \in \mathbf{R}$.

a) Determinaţi a ştiind că punctul $A(1, 4)$ aparţine graficului f.

b) Determinaţi a astfel încît f să fie pozitivă pentru orice valoare a lui x mai mare sau egală cu 5.

c) Există un număr real a astfel încît pentru orice x, $x \geq 5$, f să fie negativă ?

(Etapa judeţeană, 1986, Botoşani)

VII.A.42. Reprezentaţi într-un sistem de axe ortogonal, funcţiile :

1) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x - 1985) = 5$, oricare ar fi x real ;

2) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x - 1985) = x - 1985$, oricare ar fi x real.

(Etapa judeţeană, 1985, Călăraşi)

VII.A.43. Determinaţi funcţiile : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, a, $b \in \mathbf{R}$, ştiind că $f(1) + f(\sqrt{2}) = f(1 + \sqrt{2})$.

(Etapa judeţeană, 1986, Călăraşi)

VII.A.44. Să se determine funcţia de gradul I care îndeplineşte condiţia : $f(1 - x) = 4 - x$. Să se reprezinte grafic funcţia obţinută şi apoi să se determine punctele de pe grafic care au coordonatele egale, dacă există.

(Etapa judeţeană, 1986, Caraş-Severin)

VII.A.45. Să se reprezinte grafic funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care $f(-2x + 1/3) = 6x + 2$, oricare ar fi x real.

(Etapa judeţeană, 1986, Olt)

VII.A.46. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică relaţia $f(x - 1) = 3x - 8 - f(1)$, oricare ar fi x real.

Stabiliţi care dintre punctele : (0,4), (5,1), (3,2), (10,26) aparţin graficului lui f.

(Etapa judeţeană, 1986, Alba)

CAPITOLUL III

CALCULUL ALGEBRIC. APLICAȚII ALE CALCULULUI ALGEBRIC

VII.A.47. a) Să se arate că : $x^4 + y^4 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2$.

b) Să se descompună în factori : $4(x + y)^2 - 4(x^2 - y^2) + (x - y)^2 - z^2$.

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

VII.A.48. Suma a două numere este 24, iar suma pătratelor lor este 290. Să se determine numerele.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VII.A.49. Se consideră polinomul :

$P(X) = X^4 + 6X^2 - 7$.

Să se arate că în descompunerea acestui polinom există cel puțin un factor pozitiv, oricare ar fi valoarea reală x, a lui X.

Pentru ce valori reale ale lui x, $x \cdot P(x) = 0$?

(Etapa județeană, 1983, Brașov)

VII.A.50. a) Găsiți polinomul $P(X)$ știind că :

$P(X - 2) = (X - 2)^2 + 3 \cdot (X - 2)$.

b) Găsiți polinomul $Q(X)$ știind că :

$Q(X - 1) = (X - 1)^2 - 2X + 2$.

c) Găsiți polinomul $S(X)$ știind că :

$S(X + 1) = X^2 - X$.

(Etapa municipală, 1983, București)

VII.A.51. 1) Descompuneți în factori :

a) $ax - ay + abx - aby$; b) $16x^2 - (5x - 2y)^2$; c) $a^2 - b - 2ab + b^2 + a$.

2) Stabiliți semnul numărului :

$y = (x + 3)^2 + (x - 3)^2 + 2 \cdot (x - 3)(x + 3)$ știind că $x \in \mathbf{R}$.

(Etapa municipală, 1986, București)

VII.A.52. Scrieți cinci numere naturale consecutive. Calculați suma pătratelor lor și cercetați dacă este divizibilă cu 5.

b) Justificați dacă această sumă este pătratul altui număr natural.

(Etapa municipală, 1986, București)

VII.A.53. Demonstrați că suma cuburilor a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3.

(Etapa locală, 1986, Mureș)

VII.A.54. Arătați că există trei numere întregi consecutive, astfel încît suma pătratelor lor este 1877. Soluția este unică ?

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

VII.A.55. Să se descompună în factori :

1) $3x + x\sqrt{x} + 2\sqrt{xy} + 6\sqrt{y}$

2) $9x + 4y - 1 + 12\sqrt{xy}$

3) $x^2 + 2\sqrt{y} - y - 1$, unde $x > 0$; $y > 0$

(Etapa județeană, 1985, Cluj)

VII.A.56. Dacă a și b sînt numere reale astfel încît :

$a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = 0$, să se demonstreze că $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(b - a) = 1$.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VII.A.57. Să se afle raportul dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor reale x și y pentru care expresia :

$E(x, y) = 5x^2 - 4x + 1 + 25y^2 - 10xy$ are valoare minimă.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

VII.A.58. Scrieți polinomul $(X - 2)^4 + (X - 2)^3 + (X - 2)^2 + (X - 2)$ ca produs în care doi factori să fie de gradul I.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

VII.A.59. Fie : $E = (a - b)^3 - (a - b)^2 \cdot (a + b)$ și

$$F = (a + b)^3 + (a + b)^2 \cdot (a - b).$$

Arătați că dacă a și b sînt negative, atunci $E > F$.

(Etapa locală, 1986, Timiș)

VII.A.60. Să se descompună în factori :

$a^2 \cdot (b - c) + b^2 \cdot (c - a) + c^2 \cdot (a - b)$.

(Etapa județeană, 1983, Dolj)

VII.A.61. Aflați, fără a extrage rădăcina pătrată, valoarea logică a propoziției :

$$P : \text{“}\sqrt{17 - \sqrt{145}} + \sqrt{17 + \sqrt{145}} - \sqrt{10} > 0\text{“}.$$

(Etapa locală, 1984, Vîlcea)

VII.A.62. Să se arate că $(3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$ și să se determine toate numerele întregi x, astfel încît $x^2 < 11 - 6\sqrt{2}$.

(Etapa locală, 1984, Prahova)

VII.A.63. Calculați :

$$A = \frac{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03 + \ldots + 0{,}98 + 0{,}99}{\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}}.$$

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VII.A.64. Comparați numerele :

$$A=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}.$$

$$B=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

(Etapa județeană, 1986, Călărași)

VII.A.65. Arătați că numărul :

$$n=\sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$ este natural.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VII.A.66. a) Arătați că numărul :

$$N=\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$$ este natural.

b) Calculați raportul $\frac{E_1}{E_2}$, unde :

$$E_1=5\sqrt{6}-6\sqrt{24}+7\sqrt{54}-8\sqrt{96}+9\sqrt{150}.$$

$$E_2=2\sqrt{3}-3\sqrt{12}+4\sqrt{27}-5\sqrt{48}+3\sqrt{75}.$$

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VII.A.67. Să se arate că pentru nici o pereche de numere naturale n, k, numărul $n^{3k}-n^k+7$ nu poate fi produsul unor numere întregi consecutive.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VII.A.68. Să se arate că numărul :

$$M=9\cdot(25^p\cdot 11^{2p+1}-55^{2p})+p\cdot(1-p^8)$$

se divide cu 30 pentru orice p număr natural.

(Etapa județeană, 1986, Bistrița-Năsăud)

VII.A.69. Să se găsească $n\in\mathbf{N}$ astfel ca $n-1$ să dividă pe : $n^5-n^3-2n^2$.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.A.70. Fie numerele :

$N_1=n^2-n+7$; $N_2=-13n+2n^2+3$; $N_3=13-6n+2n^2$, $n\in\mathbf{N}$

Să se arate că numărul $M=N_1+N_2+N_3$ nu poate fi pătrat perfect.

(Etapa județeană, 1983, Brașov)

VII.A.71. Se dă relația : $n^2+n-p+1=0$ unde n, $p\in\mathbf{N}^*$, $p>1$.

a) Să se arate că, în condițiile date, expresia $E=4p-3$ se poate scrie ca un binom la pătrat, iar diferența $p-1$ se poate scrie ca un produs de două numere naturale.

b) Să se exemplifice proprietățile de la punctul a) asupra numărului 39601, pătrat perfect.

(Etapa locală, 1986, Galați)

VII.A.72. Aflați toate numerele prime care sînt mai mici cu 4 decît un pătrat perfect.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VII.A.73. Fie numerele întregi a, b și N. Să se arate că dacă numerele $2a+b$ și $a+2b$ sînt divizibile cu $3N$, atunci numărul $a^3-3ab^2+2b^3$ este divizibil cu $27N^3$.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

VII.A.74. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x+1$. Să se determine x real astfel încît să fie îndeplinită relația :

$$f^2(x+1986)-f^2(x-1986)=4\cdot f^2(x).$$

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VII.A.75. Se dă $f_m(x)=\sqrt{x^2+2x+1}-m\sqrt{4-4x+x^2}$, $m\in\mathbf{R}$.

a) Trasați graficul funcției $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f_1(x)$.

b) Rezolvați ecuația $f_1(x)=0$.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

VII.A.76. Se dau polinoamele :

$$P(X)=(X+1)(X^2-3X+1)-X^2(X-2)$$

$$Q(X)=(X+1)^2(X-1)-X(X^2-1)-(X^2-X+2).$$

a) Să se arate că $P[Q(X^2)]-Q[P(X^2)]$ este un polinom constant.

b) Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} P(x) & \text{pentru } x\leqslant 0\\ 1 & \text{pentru } 0<x\leqslant 4\\ Q(x) & \text{pentru } x>4\end{cases}$$

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

VII.A.77. Să se arate că numărul :

$$N=\frac{(6^n)^2+12\cdot 6^n+32}{5\cdot 6^n+40},\ n\in\mathbf{N}$$

este natural.

(Etapa județeană, 1985, Suceava)

VII.A.78. Să se arate că nu există valori ale lui $n\in\mathbf{N}$ pentru care fracția :

$$\frac{n^2-n+2}{n^2+n+2}$$

să fie ireductibilă.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VII.A.79. Fie fracţia :

$$F(x, y)=\frac{x^2+y^2+2(xy-2)}{(x-y)(x+y)-4(x-1)}$$

Să se determine valorile naturale ale lui x pentru care $F(x, 1)$ este număr întreg.

(Etapa judeţeană, 1986, Sibiu)

VII.A.80. Să se arate că numărul :

$P=\frac{2^{4n}+2^{2n+1}+1}{2^{2n}}$ este pătratul unui număr raţional,

oricare ar fi n natural.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VII.A.81. Se dă :

$$E(x)=\frac{16x^4-8x+1}{4x^2+4x+1}$$

Să se reprezinte grafic funcţia definită prin formula $f(x)=\sqrt{E(x)}$ pentru valorile reale admisibile ale lui x.

(Etapa judeţeană, 1986, Gorj)

VII.A.82. Se dă fracţia :

$$F(a, b)=\frac{a^2-2ab+1-2b+2a+b^2}{a^2-1-2ab+b^2}$$

a) Să se simplifice fracţia.

b) Ştiind că $(a-b)\in \mathbf{Z}$ să se calculeze valorile întregi ale lui $F(a, b)$.

(Etapa judeţeană, 1986, Timiş)

VII.A.83. Fie :

$$F(x, y)=\frac{x^5-x^4y-xy^4+y^5}{x^4-x^3y-x^2y^2+xy^2}$$

Calculaţi $E(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$.

(Etapa judeţeană, 1983, Buzău)

CAPITOLUL IV

IDENTITĂŢI. INEGALITĂŢI

VII.A.84. Numerele x, y, a şi b verifică relaţia :

$$x+\frac{x}{1}=y+\frac{1}{y}=a \text{ şi } xy=b,\ b\neq 1$$

Ce relaţii există între a şi b ?

(Etapa judeţeană, 1985, Alba ; 1986, Tulcea)

VII.A.85. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $a + b > 0$, atunci :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqslant \frac{a^3 + a^2 \cdot b + ab^2 + b^3}{4}$$

(Etapa locală, 1985, Bihor)

VII.A.86. Dacă a, b sînt numere reale pozitive cu $a + b = k$, k fiind un număr real fixat, atunci produsul $a \cdot b$ este maxim atunci cînd $a = b = k/2$.

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

VII.A.87. Verificați că :

$$\sqrt{2} + (\sqrt{2})^{-1} \geqslant 2, \; \sqrt{2} + (\sqrt{2})^{-1} + \sqrt{3} + (\sqrt{3})^{-1} \geqslant 4,$$
$$\sqrt{2} + (\sqrt{2})^{-1} + \sqrt{3} + (\sqrt{3})^{-1} + \sqrt{4} + (\sqrt{4})^{-1} \geqslant 6.$$

Scrieți în mod analog o sumă de numere reale care să fie mai mare sau cel puțin egală cu 1986.

(Etapa locală, 1986, Călărași)

VII.A.88. Arătați că :

$$S = \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \frac{\sqrt{56}}{15} + \frac{\sqrt{72}}{17} + \frac{\sqrt{90}}{19} < 3.$$

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VII.A.89. Arătați că dacă a, b, c sînt numere reale satisfăcînd condiția

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \text{ atunci } -\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ca \leqslant 1.$$

(Etapa județeană, 1986, Iași și Călărași)

VII.A.90. Să se determine valoarea maximă a raportului dintre un număr de trei cifre și suma numerelor reprezentate de cifrele sale.

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

VII.A.91. Să se afle numerele reale x, y, z care satisfac inegalitatea :

$$x(x + 1) + y(y - 1) + z(z - 3) \leqslant -11/4.$$

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VII.A.92. Să se arate că :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1 + 2^n}{1 + 3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{N} \text{ și } n > 1.$$

(Etapa locală, 1986, Galați)

VII.A.93. Să se demonstreze că :

$$\frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{3x^2 \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2} < 2$$

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.A.94. Demonstrați că :

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}}>99{,}99.$$

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VII.A.95. Arătați că :

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{2p}>\frac{1}{2},\ \text{oricare ar fi } p>1.$$

(Etapa județeană, 1986, Argeș și Vîlcea)

VII.A.96. Să se arate că $|x+1/x|\geqslant 2$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0$.
Să se determine valoarea maximă a expresiei :

$$\frac{x}{x^2-x+1}+\frac{x}{x^2+x+1},$$

oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$. Să se precizeze valoarea lui x pentru care este atinsă valoarea maximă.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VII.A.97. Fie x, y, z trei numere naturale. Să se arate că :

a) $\left(\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^y}+\frac{1}{2^z}\right)\cdot 2^{x+y+z}=2^{x+y}+2^{y+z}+2^{z+x}$.

b) Dacă $2^{x+y}+2^{x+y}+2^{z+x}>3$ atunci
$2^{x+y}+2^{y+z}+2^{z+x}>4$.

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

VII.A.98. Să se arate că :

a) $\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{40}+\sqrt{225}<\sqrt{10}+\sqrt{90}+\sqrt{128}<\sqrt{129}+\sqrt{160}$.

b) Oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z astfel încît $x^2+y^2=z^2$ rezultă $xy=az^2$, unde $0\leqslant a\leqslant 1$.

(Etapa județeană, 1983, Tulcea)

VII.A.99. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, să se demonstreze că :

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3.$$

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VII.A.100. Fie a,b,c numere reale pozitive. Calculați valoarea expresiei :

$$\left(\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\right)^n,\ n\in\mathbf{N}$$

știind că $abc=1$.

(Etapa județeană, 1983, Dolj)

CAPITOLUL V

CALCUL DE SUME

VII.A.101. Fie :

$$a_n = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \ldots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}},\ n \in \mathbf{N}^*$$

1) Demonstraţi că $a_8 = \frac{2}{3}$ şi $a_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2) Determinaţi numerele naturale $n \leqslant 15$ astfel încît $a_n \in \mathbf{Q}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Teleorman)

VII.A.102. Calculaţi valoarea expresiei :

$$\frac{(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{1985}}{(-1)^{1985} + (-1)^{1985^2} + \ldots + (-1)^{1985^{1985}}}$$

(Etapa judeţeană, 1985, Călăraşi)

VII.A.103. Să se calculeze valoarea expresiei :

$$E = \frac{5\cdot(-1)^5 + 10\cdot(-1)^{10} + 15\cdot(-1)^{15} + \ldots + 1980\cdot(-1)^{1980} + 1985\cdot(-1)^{1985}}{(-1)^k\cdot(-1)^{k+1}\cdot(-1)^{k+2}\cdot(-1)^{k+3}},$$

$k \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1986, Neamţ)

VII.A.104. Fie funcţiile : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x + 3$.
$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h(x) = 2x + 1$.

1) Calculaţi : $h(1) + h(2) + \ldots + h(100)$.

2) Arătaţi că : $\frac{h(n)}{f(n)} < 2$, oricare ar fi numărul natural n.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

VII.A.105. Să se calculeze :

a) $E = 10^9 - 9\cdot10^8 - 10^7 - 9\cdot10^6 - \ldots - 9\cdot10 - 1$.

b) $F = (n+1)^n - n(n+1)^{n-1} - \ldots n(n+1)^2 - n(n+1) - 1$.

(Etapa judeţeană, 1986, Gorj)

VII.A.106.

Fie n un număr natural nenul. Este posibil ca $\frac{n^2+n+2}{2}$ bile să fie puse în n cutii aşa încît în fiecare cutie să se găsească cel puţin o bilă şi să nu existe două cutii care să conţină acelaşi număr de bile ?

Dar $\frac{n^2+n-2}{2}$ bile ?

(Etapa judeţeană, 1986, Dolj)

CAPITOLUL VI

ECUAȚII

VII.A.107. Stabiliți cîte perechi de numere naturale (x, y) verifică egalitatea : $2x + 3y = 10$.

(Etapa locală, 1984, Giurgiu)

VII.A.108. Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$xy + 3x + 2y + 5 = 0.$$

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

VII.A.109. Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{4}$$

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

VII.A.110. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația :

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 14 \cdot 15}{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z} = 7\,007.$$

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VII.A.111. Rezolvați ecuația :

$$x + y + z + u - 2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}{2}$$

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VII.A.112. Să se rezolve ecuația : $3[x] - 1 = 2x$, unde $[x]$ reprezintă partea întregă a numărului x.

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

VII.A.113. **Știind că $[x]$ este partea întreagă a numărului real x, să se arate că :** $[x] + [x + 1/4] + [x + 2/4] + [x + 3/4] = [4x]$.

VII.A.114. Rezolvați ecuațiile :

a) $(x + 1)^2 - (x - 3)^2 = (x - 1)^2 - (x + 3)^2 + 16$.

b) $ax - 2a = 2 - x$.

c) $|x - 1| + |2x - 2| + |3x - 3| = 0$.

(Etapa locală, 1983, Teleorman)

VII.A.115. Să se determine valorile întregi ale lui x și y astfel încît :

$$(5x - 3y)(-1)^k - (2x - y)(-1)^{k+1} + (6x - 2y)(-1)^{3k+1} -$$
$$- x - 2y + 3(-1)^{2k} = 15, \; k \in \mathbf{N}.$$

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

VII.A.116. La olimpiada de matematică, din totalul elevilor prezenţi, 80% au rezolvat primul subiect, iar 70% pe cel de-al doilea. Ştiind că numai 45 de elevi au rezolvat ambele subiecte şi că nu au existat elevi care să nu fi rezolvat nici unul din cele două subiecte, aflaţi cîţi elevi s-au prezentat la concurs.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

INDICAŢII

VII.A.1. b) n par şi n impar.

VII.A.2. Folosim faptul că $a^{b+c} = a^b a^c$ şi că $a^{bc} = (a^b)^c$.

VII.A.3. Obţinem imediat că 6^n este factor comun.

VII.A.4. $n^2 + n = n(n+1)$ este un număr par, deci ar rezulta $n(n+1) = 1982$...

VII.A.5. a) Pentru $x = 37$ apare factorul $37 - 37 = 0$.

b) $1 + 2 + \ldots + 50 = (1 + 50) + (2 + 49) + \ldots + (25 + 26) = \ldots$

c) $(-1)(-2)\ldots\ldots(-50) = 50 \cdot 49 \ldots\ldots 2 \cdot 1$, fiind un număr par de factori.

VII.A.6. Prin reducere la absurd. Dacă numărul ar fi impar, atunci fiecare $a_i + b_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, este impar, deci $a_i + b_i$ au parităţi diferite, ş.a.m.d.

VII.A.7. Notăm numărul cu $\overline{xy}$.

VII.A.8. Din $10x + y = 2xy$ şi condiţia ca $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ şi $y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ rezultă că $2x - 1$ divide pe 5.

VII.A.9. $\overline{ab} + \overline{cc} = \overline{b6}$ implică $b + c = 6$ sau $b + c = 16$, unde $b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

VII.A.10. Obţinem, de exemplu : $y = -2 + \dfrac{27}{2x - 3}$ şi ţinem cont că $x, y \in \mathbf{N}$.

VII.A.11. Avem $\overline{ab} = 4(a + b)$.

VII.A.12. Avem $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c)$ şi $6 \leqslant a + b + c \leqslant 24$.

VII.A.13. $\overline{abcd} = \overline{dcba}$ implică $a = d$ şi $b = c$. $\overline{abba} = 11(91a + 10b)$ şi $91a + 10b$ nu este multiplu de 11.

VII.A.14. La numărător obţinem : $15^n \cdot 3 + 15^n \cdot 25 + 15^n \cdot 6 = 15^n \cdot 34$.

VII.A.15. Se aplică proprietatea fundamentală a şirului de rapoarte egale.

VII.A.16. Amplificăm convenabil rapoartele din ipoteză şi folosim proprietatea fundamentală a şirului de rapoarte egale.

VII.A.17. Se efectuează suma fracţiilor.

VII.A.18. Consideraţi n par şi apoi n impar.

VII.A.19. Consideraţi k par şi k impar.

VII.A.20. Studiem toate cazurile după parităţile lui m şi n.

VII.A.21. $\sqrt{x^2} = |x|$ şi $|x| = |-x|$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

VII.A.22. $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

VII.A.23.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1.$

b) $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = 3-\sqrt{5}.$

c) Ultima cifră a numărului $5n+7$ este 2 sau 7.

VII.A.24.

$$\frac{1}{7-4\sqrt{3}} = 7+4\sqrt{3}.$$

VII.A.25. Se compară x^2 cu y^2.

VII.A.26. Calculaţi :

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2.$$

VII.A.27. a) $10-\sqrt{19} < 10+\sqrt{19}$ deci $\sqrt{10-\sqrt{19}} < \sqrt{10+\sqrt{19}}.$

VII.A.28.

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

VII.A.29. Utilizăm formula : $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

unde : $C^2 = A^2 - B$.

VII.A.30. Comparaţi elementele din cele două mulţimi.

VII.A.32. $f(n) = n(n-1)+11$ impune $n = 11$ sau $n-1 = 11$.

VII.A.33. b) Se găseşte o valoare a lui n pentru care $f(n)$ nu este prim.
c) $f(n)$ se scrie ca o sumă de pătrate.

VII.A.34. b) $x = y$ este echivalentă cu $f(x) = x$.

VII.A.36. $mx+2 = 7$, $x \equiv 1$.

VII.A.38. a) Se rezolvă ecuația $-2x+m=-5$ pentru $x=4$.

b) Se analizează două cazuri.

VII.A.39. Folosiți, după ce ați reprezentat grafic, cunoștințele de geometrie.

VII.A.40. Căutați $f(x)=ax+b$ în condițiile date.

VII.A.41. b) Se impune existența implicației : „$x \geqslant 5$ implică $x \geqslant -\frac{a}{2}$".

VII.A.42. 1) Oricare ar fi x real, $f(x)=5$.

2) Oricare ar fi x real, $g(x)=x$.

VII.A.43. Calculăm $f(1)$, $f(\sqrt{2})$ și $f(1+\sqrt{2})$ și utilizăm condițiile din ipoteză.

VII.A.44. Oricare ar fi $y=1-x$, avem $f(y)=y+3$.

VII.A.45. Fie $y=-2x+\frac{1}{3}$. Atunci $f(y)=3y+1$.

VII.A.46. Pentru $x=2$ rezultă $f(1)=-1$ și, deci, $f(x-1)=3x-7$ ș.a.m.d.

VII.A.47. Folosiți $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

VII.A.48. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$.

VII.A.49. Descompunem polinomul.

VII.A.50. Dacă notăm $X-2$ cu Y, obținem polinomul $P(Y)=Y^2+3Y$ sau $P(X)=X^2+3X$.

VII.A.51. 1) Se grupează convenabil, termenii.

2) y este un pătrat perfect, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Vezi indicațiile de la VII.A.47.

VII.A.52. Numerele $5k-2$, $5k-1$, $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $k \in \mathbf{N}$ sînt, de exemplu, cinci numere naturale consecutive.

VII.A.53. Să calculăm efectiv pentru numerele : $n-1$, n, $n+1$, unde $n \geqslant 1$.

VII.A.54. Fie $x-1$, x, $x+1$, cu $x \in \mathbf{Z}$, numerele întregi consecutive.

VII.A.55. Se grupează convenabil, termenii.

VII.A.56. $a^2+b^2-2a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}+5=(a-\sqrt{2})^2+(b-\sqrt{3})^2$.

VII.A.57. $E(x, y)=(5y-x)^2+(2x-1)^2$, este minimă dacă...

VII.A.59. De exemplu : $E=(a-b)^2(a-b-a-b)=-2b(a-b)^2>0$.

VII.A.60. Scriem, de exemplu : $c-a=(c-b)-(a-b)$.

VII.A.61. Se arată că : $\sqrt{17-\sqrt{145}}+\sqrt{17+\sqrt{145}}>\sqrt{10}$.

VII.A.62. x verifică relația $x^2 < (3-\sqrt{2})^2$.

VII.A.63. $0{,}01+0{,}02+0{,}03+\ldots+0{,}98+0{,}99=(0{,}01+0{,}99)+$ $+(0{,}02+0{,}98)+\ldots+(0{,}49+0{,}51)+0{,}50$.

iar $\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$.

VII.A.64. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

VII.A.65. $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$.

VII.A.67.

$n^{3k}-n^k+7=n^k(n^k-1)(n^k+1)+7$ este un număr impar, numerele naturale n^{k-1}, n^k și n^{k+1} fiind consecutive etc.

VII.A.69.

$$\frac{n^5-n^3-2n^2}{n-1}=n^3-2n-2-\frac{2}{n-1}\quad \text{ş.a.m.d.}$$

VII.A.70. Deducem că ultima cifră a numărului este 3 sau 8.

VII.A.71. $4p-3=4(n^2+n+1)-3=(2n+1)^2$.

VII.A.72. $p=n^2-4=(n-2)(n+2)$ implică, de exemplu $n-2\equiv p$ și $n+2=1$.

VII.A.73. $a^3-3ab^2+2b^3=(a-b)^2(a+2b)$.

VII.A.74. $f^2(x+1986)=(x+1986+1)^2$ și se calculează efectiv.

VII.A.75. $\sqrt{x^2+2x+1}=|x+1|$ și $\sqrt{4-4x+x^2}=|x-2|$ și ținem cont de definiția modulului unui număr real.

VII.A.77.

Avem $(6^n)^2+12\cdot 6^n+32=[(6^n)^2+12\cdot 6^n+36]-4=(6^n+6)^2-4$, etc.

VII.A.78. $n^2-n+2=n(n-1)+2$ este un număr natural par.

VII.A.79. $F(x,1)=1+\dfrac{x-3}{6}\in \mathbf{Z}$.

VII.A.80. Realizați un pătrat.

VII.A.82. $F(a,b)=\dfrac{a-b-1}{a-b+1}=1-\dfrac{2}{a-b+1}$.

VII.A.83. Simplificăm fracția F.

VII.A.86. $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ sau $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ cu egalitate dacă $a = b$.

VII.A.87. În general.

$$a + a^{-1} = a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \text{ şi } (a + a^{-1}) + (b + b^{-1}) \geqslant 2 + 2 = 4.$$

VII.A.88.

$$\frac{\sqrt{20}}{9} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{4+5} < \frac{1}{2}; \quad \frac{\sqrt{30}}{11} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{5+6} < \frac{1}{2}, \text{ ş.a.m.d.}$$

VII.A.89. Există inegalitatea : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, care rezultă din inegalitatea $(a - b)^2 + (b -)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0$, oricare ar fi a, b, c numere reale.

VII.A.90. $\overline{xyz} = 100x + 10y + z < 100x + 100y + 100z = 100(x + y + z)$.

VII.A.91. **Membrul stîng se scrie, echivalent, ca o sumă de pătrate.**

VII.A.92. Prin calcul direct se obţin inegalităţi echivalente sau se efectuează majorări (minorări) convenabile.

VII.A.93. Membrul stîng al inegalităţii se mai scrie, echivalent :

$$\frac{(x^2 + y^2)^2 + x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^2 \text{ şi } \frac{xy}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{2}, \text{ oricare ar fi } x,\ y \in \mathbf{R}.$$

VII.A.94.

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{9999}}, \text{ oricare ar fi } 1 \leqslant k \leqslant 9999.$$

VII.A.95.

$$\frac{1}{p+k} > \frac{1}{p+p} = \frac{1}{2p}, \text{ oricare ar fi } k < p.$$

VII.A.96. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$, care este pozitiv pentru $x > 0$ şi negativ pentru $x < 0$.

b) $$\frac{x}{x^2 - x + 1} + \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1} + \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1}$$

şi ţinem cont de a).

VII.A.97. b) Pentru $x = y = z = 0$ rezultă $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} = 3$. Dacă $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} > 3$ rezultă că cel puţin unul dintre numerele x, y, z este nenul ş.a.m.d.

VII.A.98. $x^2+y^2=z^2$ implică $x^2<z^2$ şi $y^2<z^2$ sau $x<z$ şi $y<z$. Din $x<z$ rezultă faptul că există a, $0\leq a<1$ astfel încît $x=az$...

VI.A.99. Notăm $b+c-a=m$, $a+c-b=n$ şi $a+b-c=p$.

VII.A.100. Amplificăm a doua fracţie cu a, a treia fracţie cu ab şi efectuăm suma indicată.

VII.A.101. 1) $a=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

2) Punem condiţia $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\in\mathbf{Q}$.

VI.A.102. La numărător sînt 1985 termeni 1 sau -1.

Numărul 1985^n este impar oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

VII.A.103. La numărător grupăm primii doi termeni, următorii doi, ş.a.m.d.

VII.A.104. $h(1)+h(2)=(2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)=(2\cdot1+2\cdot2)+(1+1)=2(1+2)+(1+1)$ şi calculăm suma $S=1+2+3+\ldots+100$ care apare, grupînd termenii egal depărtaţi de capete, doi cîte doi, $S=1+2+3+\ldots+100=(1+100)+(2+99)+\ldots+(50+51)=\ldots$

VII.A.105. $10^9-10^8(10-1)-10^7(10-1)-\ldots-10(10-1)=(10^9-10^9)+(10^9-10^8)+\ldots+(10-1)=9$.

VII.A.106. Punem în prima cutie o bilă, în a doua cutie două bile ş.a.m.d. În n cutii putem pune în condiţiile date, $\frac{n^2+n+2}{2}$ bile şi nu putem pune $\frac{n^2+n-2}{2}$ bile.

VII.A.107. $2x=10-3y$, $2x\in\mathbf{N}$ implică $10-3y\in\mathbf{N}$ deci $10-3y>0$. ş.a.m.d.

VII.A.108. Ecuaţia se scrie echivalent $x=-2+\frac{1}{y+3}$ şi ţinem cont că $x\in\mathbf{Z}$ şi $y\in\mathbf{Z}$.

VII.A.109. Ecuaţia se scrie echivalent: $x=2+\frac{8}{3y-4}$ şi ţinem cont că x şi y sînt întregi.

VII.A.110. Scriem numărătorul ca produs de puteri de numere prime.

VII.A.111. Ecuaţia se scrie echivalent: $(x-1)^2+(z-1)^2+(u-1)^2=0$.

VII.A.112. Notăm cu $\{x\}$ partea fracţionară a lui x; $x=[x]+\{x\}$, unde evident $0\leqslant\{x\}<1$.

VII.A.113. Utilizăm relaţia: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$.

VII.A.115. Studiem cazurile k par şi k impar.

GEOMETRIE

CLASA A VII-A

CAPITOLUL I

RECAPITULAREA CUNOŞTINŢELOR DIN CLASA A VI-A
PROPRIETĂŢI ALE TRIUNGHIURILOR

VII.G.1. Fie ABC un triunghi echilateral. Pe latura AB se ia un punct oarecare M şi pe latura CA un punct N astfel încît segmentul CN să fie congruent cu AM. Fie P intersecţia segmentelor CM şi BN. Demonstraţi că dacă punctul M se mişcă pe latura AB, unghiul MPN rămîne constant.

(Etapa locală, 1984, Maramureş)

VII.G.2. În triunghiul ABC, unghiul format de latura BC cu înălţimea CD este congruent cu unghiul format de latura AB cu bisectoarea AA' a unghiului A. Fie H intersecţia segmentelor CD şi AA'.

a) Ce fel de triunghi este ABC ?

b) Arătaţi că dreptele BH şi AC sînt perpendiculare.

(Etapa locală, 1985, Gorj)

VII.G.3. Fie triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ cu $m(\widehat{A}) = 2x$. Fie A' simetricul lui A faţă de segmentul BC, D intersecţia segmentelor AA' şi BC, D' simetricul lui D faţă de segmentul AC, E intersecţia segmentelor DD' şi AC.

Determinaţi x astfel încît punctele D', C, A' să fie coliniare.

(Etapa judeţeană, 1984, Neamţ)

VII.G.4. Demonstraţi că dacă unul din unghiurile unui triunghi dreptunghic are măsura de 15°, înălţimea dusă din vîrful unghiului drept are lungimea un sfert din lungimea ipotenuzei.

VII.G.5. Într-un triunghi ABC dreptunghic în A, avînd $m(\widehat{C}) = 15°$, se duc din A înălţimea AD, bisectoarea AE şi mediana AO (D, E şi O aparţin lui BC). Arătaţi că $ED = \frac{1}{2} OE$.

VII.G.6. În triunghiul ABC cu $m(\widehat{C}) = 60°$, bisectoarele AK şi BE (K pe BC, E pe AC) se intersectează în O. Arătaţi că $OK = OE$.

(Etapa judeţeană, 1986, Vaslui)

VII.G.7. Fie pătratul $ABCD$ şi fie M un punct în interiorul triunghiului ABC. Arătaţi că $MD > MB$.

(Etapa judeţeană, 1984, Olt)

VII.G.8. Dacă O este un punct din interiorul unui trapez, arătaţi că suma distanţelor lui O la vîrfurile trapezului este minimă cînd O se află la intersecţia diagonalelor.

(Etapa judeţeană, 1985, Argeş)

VII.G.9. Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că :

a) $E(a, b, c) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 > 0$;

b) $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

(Etapa judeţeană, 1984, Argeş)

VII.G.10. Arătaţi că, dacă între laturile de lungimi a, b, c, ale unui triunghi ABC există relaţia $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, atunci triunghiul este echilateral.

(Etapa judeţeană, 1984, Brăila)

VII.G.11. a) Cîte drepte distincte sînt determinate de 101 puncte necoliniare cîte trei ?

b) Care este numărul minim (diferit de 1) de drepte determinate de 101 puncte ?

(Etapa locală, 1985, Argeş)

VII.G.12. Fie, în interiorul unui pătrat, 101 puncte. Demonstraţi că există o dreaptă care să treacă prin unul din ele şi să lase de o parte şi de alta a ei exact cîte 50 puncte.

(Etapa judeţeană, 1986, Botoşani)

CAPITOLUL II

CERCUL

VII.G.13. Fie un triunghi ABC în care $m(\widehat{A}) = 30°$, $BC = 10$ cm. Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC.

(Etapa judeţeană, 1984, Brăila)

VII.G.14. Două drepte sînt concurente în punctul M şi sînt tangente la un cerc cu centrul în O, în punctele A şi B. Prelungim raza OB dincolo de B cu un segment BC congruent cu OB. Arătaţi că $m(\widehat{AMC}) = 3m(\widehat{BMC})$.

(Etapa judeţeană, 1984, Arad)

VII.G.15. Arătaţi că picioarele perpendicularelor duse din vîrfurile unui patrulater inscriptibil pe diagonalele acestuia sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

(Etapa judeţeană, 1986, Covasna)

VII.G.16. Se consideră un patrulater convex, avînd diagonalele perpendiculare. Fie O punctul lor de intersecție. Arătați că proiecțiile lui O pe laturi sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

(Etapa locală, 1984, Suceava)

VII.G.17. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc cu centrul O. Notăm cu M și N proiecțiile punctului O pe dreptele AC, respectiv AB, iar cu P și Q cel de-al doilea punct de intersecție a dreptelor BM, respectiv CN cu cercul. Arătați că patrulaterul $MNQP$ este inscriptibil.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VII.G.18. Fie $ABCD$ un romb și E un punct oarecare pe una dintre diagonale. Dacă M, N, P, Q sînt picioarele perpendicularelor din E, respectiv pe dreptele AB, BC, CD și DA, arătați că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VII.G.19. Pe semicercul cu diametrul AB și centrul O se iau punctele C și D astfel încît măsurile arcelor AC, CD și DB să fie egale. Fie M intersecția segmentelor AD și OC, N intersecția lui BC cu OD și P intersecția lui AD cu BC. Arătați că :

a) patrulaterul $ABDC$ este trapez isoscel ;

b) patrulaterul $OMPN$ este inscriptibil.

(Etapa locală, 1984, Giurgiu)

VII.G.20. Mediana AM (M pe segmentul BC) a triunghiului oarecare ABC intersectează cercul circumscris acestui triunghi în P. Fie T simetricul lui P față de M și G, H intersecțiile dreptelor BT și CT cu dreapta AC, respectiv dreapta AB. Arătați că patrulaterul $AHTG$ este inscriptibil.

(Etapa locală, 1984, Prahova)

VII.G.21. Fie $ABCD$ un paralelogram și I punctul în care cercul circumscris triunghiului ABC intersectează a doua oară dreapta BD. Dreptele AI și CD se intersectează în E, iar dreptele CI și AD în F. Arătați că :

a) patrulaterul $IEDF$ este inscriptibil ;

b) dreptele EF și AC sînt paralele.

(Etapa județeană, 1985, Alba)

VII.G.22. Demonstrați că un trapez este inscriptibil dacă și numai dacă distanțele de la mijlocul unei baze la laturile neparalele sînt congruente.

(Etapa județeană, 1986, Călărași)

VII.G.23. Prin vîrful A al triunghiului ABC, în interiorul unghiului BAC se duc două semidrepte care intersectează segmentul BC în M și N, iar cercul circumscris triunghiului în P și Q. Arătați că o condiție necesară și suficientă pentru ca mediatoarele a trei laturi ale patrulaterului $MNQP$ să fie concurente este ca triunghiul ABC să fie isoscel.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

VII.G.24. Demonstrați că mediatoarea segmentului determinat de picioarele a două înălțimi ale unui triunghi împarte cea de-a treia latură a triunghiului în două părți egale.

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VII.G.25. Fie în triunghiul ABC înălțimile BD și CE. Mediatoarea segmentului DE intersectează latura BC în F. Arătați că triunghiul DEF este echilateral dacă numai dacă $m(\widehat{A}) = 60°$.

VII.G.26. În triunghiul ascuțitunghic ABC, fie M, N, P picioarele înălțimilor din A, B, respectiv C, iar H intersecția înălțimilor. Demonstrați că H este centrul cercului înscris triunghiului MNP.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

VII.G.27. Se consideră unghiul drept AOB. Un cerc ce trece prin A și B intersectează a doua oară semidreptele AO și BO în C și respectiv D. Arătați că cercurile de diametri OA și OB se intersectează pe mediana din O a triunghiului COD.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VII.G.28. Demonstrați că, pentru orice punct M de pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC, lungimea unuia din cele trei segmente : MA, MB, MC este egală cu suma celorlalte două.

(Etapa județeană, 1984, Gorj)

VII.G.29. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, D un punct pe latura AC a triunghiului, iar E și F proiecțiile lui A pe dreptele BD și BC.

a) Arătați că patrulaterele $ABFE$ și $CDEF$ sînt inscriptibile.

b) Unde se găsește punctul D dacă triunghiul AEF este isoscel ?

c) În condiția de la b), determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC astfel ca patrulaterul $ABFE$ să fie trapez isoscel.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VII.G.30. Pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC se ia, pe arcul mic BC, punctul variabil M. Bisectoarea unghiului BMC taie coarda BC în T. Fie Q și S picioarele perpendicularelor din T pe BM, respectiv MC. Demonstrați că :

a) triunghiul TQS este echilateral ;

b) punctele M, T, A sînt coliniare.

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VII.G.31. Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC, iar M intersecția tangentelor în B și C la cercurile circumscrise triunghiurilor ABD și respectiv ACD. Demonstrați că :

a) patrulaterul $ABMC$ este inscriptibil.

b) punctele A, D, M sînt coliniare dacă și numai dacă AD este bisectoarea unghiului BAC.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

VII.G.32. Două cercuri de centre O_1 și O_2 sînt tangente exterioare în punctul A. Dreapta O_1O_2 mai intersectează cercurile, respectiv în B și C. O tangentă comună are punctele de tangență cu cercurile în D și E ($D \neq E$). Dreptele BD și CE se intersectează în M. Stabiliți natura triunghiului :

a) ADE ;

b) MDE.

VII.G.33. Fie cercurile de centre O_1 și O_2, tangente exterior, iar dreapta MN una dintre tangentele comune exterioare (M și N punctele de tangență), A și B punctele în care dreapta O_1O_2 intersectează a doua oară cele două cercuri. Arătați că patrulaterul $AMNB$ este inscriptibil.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VII.G.34. În triunghiul ABC medianele BB' și CC' sînt perpendiculare. Fie B'' și C'' intersecțiile lor cu cercul circumscris triunghiului ABC. Arătați că dreapta $B''C''$ este perpendiculară pe mediana din A.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VII.G.35. Trei puncte ale unui cerc reprezintă intersecțiile cu cercul ale înălțimilor unui triunghi înscris în cerc, intersecții diferite de vîrfurile triunghiului. Construiți acest triunghi.

(Etapa județeană, 1985, Vîlcea)

VII.G.36. Într-un cerc se duc două coarde congruente neparalele AB și CD astfel încît $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{AD}$. Tangentele la cerc în B și C se intersectează în M.

a) Arătați că $MA = MD$.

b) Știind că dreptele AB și CD formează între ele un unghi de $30°$ și că tangentele MB, MC formează un unghi de $100°$, calculați măsura arcului AB.

(Etapa județeană, 1984, Olt)

VII.G.37. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Două drepte paralele duse prin punctele A și B intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele D și respectiv E. Arătați că dreptele AE și CD sînt paralele.

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

VII.G.38. Din punctul P exterior cercului de centru O, se duc tangentele la cerc PA și PB, A și B fiind punctele de contact. Fie M un punct oarecare din interiorul segmentului AB, diferit de mijlocul acestuia. Perpendiculara dusă din M pe OM intersectează dreapta PA în D și dreapta PB în E. Demonstrați că :

a) $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle ODM$;

b) $MD = ME$.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

VII.G.39. Fie M un punct pe latura AD a unui dreptunghi $ABCD$. Cu centrul în M descriem un cerc ce taie dreapta BC în E și F. Dreptele ME și MF taie diagonalele AC și BD în G și J și respectiv în H și I. Demonstrați că punctele G, H, I, J sînt conciclice.

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VII.G.40. Fie triunghiul ABC. Bisectoarea unghiului BAC intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în D. Diametrul DO intersectează dreapta AC în E și cercul în F. Dreapta BE intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în G. Demonstrați că :

a) A, B, O, E sînt conciclice ;

b) triunghiul AFG este isoscel ;

c) punctele A, G, C, B sînt vîrfurile unui trapez.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VI.G.41. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Un cerc de centru O situat în același plan intersectează triunghiul în punctele A_1, A_2, diferite, situate pe latura BC. Dreptele OA_1, OA_2 intersectează dreptele AB, AC în B_1, B_2 respectiv C_1, C_2.

a) Arătați că punctele B_1, B_2, C_1, C_2 sînt conciclice.

b) Stabiliți poziția lui O astfel ca B_1, B_2, C_1, C_2 să fie vîrfurile unui trapez isoscel.

(Etapa județeană, 1985, Teleorman)

VII.G.42. Fie triunghiul ABC. Unghiurile A și B sînt împărțite în cîte trei unghiuri congruente de dreptele AM, AN și respectiv BD, BE, (M și N pe segmentul BC, D și E pe AC), astfel ca $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle NAC$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle EBC$. Segmentele AM și BD se intersectează în P, AM și BE se intersectează în T, AN și BD în Q, AN și BE în R.

a) Arătați că patrulaterul $PQRT$ nu poate fi înscris în cerc.

b) Dacă M, T, R, N sînt conciclice, atunci $BD = DC$, iar dacă Q, R, E, D sînt conciclice, atunci $AM = MC$.

c) Dacă $MTRN$ și $RQDE$ sînt simultan inscriptibile, atunci $AC = BC$.

d) Dacă $RNCE$ este inscriptibil, atunci $m(\widehat{ACB}) = 72°$.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

VII.G.43. Fie AB un diametru în cercul de centru O și M un punct oarecare pe cerc, diferit de A și de B, iar M' simetricul lui M față de O. Construim pe semidreapta AB, segmentele BN congruent cu BM ; BP cu BM', apoi NN_1 congruent cu MN ; P_1P cu $M'P$ ș.a.m.d.

a) Arătați că $m(\widehat{ANM}) + m(\widehat{APM'}) =$ ct., oricare ar fi M pe cercul de centru O, $M \notin \{A, B\}$.

b) După cîți pași de construcție în același mod descris mai sus, suma de la a) devine mai mică de $1°$?

(Etapa județeană, 1984, Constanța)

VII.G.44. Fie, într-un cerc de centru O, AB şi CD două coarde congruente care se intersectează în M, (A şi D de aceeaşi parte a diametrului OM). Arătaţi că :

a) $AM \equiv MC$ şi $BM = MD$.

b) Dacă O_1 şi O_2 sînt mijloacele segmentelor BD, respectiv AC, arătaţi că punctele O_1, M, O_2, O sînt coliniare.

(Etapa locală, 1984, Hunedoara)

VII.G.45. Unghiurile A şi C ale patrulaterului convex $ABCD$ sînt congruente şi $AB + CD = BC + AD$. Arătaţi că, în patrulaterul $ABCD$, diagonala BD este axă de simetrie.

(Etapa judeţeană, 1986, Gorj)

VII.G.46. Perimetrul unui trapez isoscel circumscris unui cerc este de 120 cm. Ştiind că raportul bazelor trapezului este $0,(3)$, aflaţi măsurile laturilor şi unghiurilor trapezului.

(Etapa judeţeană, 1985, Argeş)

VII.G.47 Fie triunghiul ABC, dreptunghic în A. Se construieşte E simetricul punctului A faţă de dreapta BC. Fie M piciorul perpendicularei duse din E pe dreapta AC. Dreapta ME intersectează dreapta BC în N, iar Q este simetricul lui M faţă de dreapta AE. Demonstraţi că :

a) punctele Q, B, E sînt coliniare ;

b) patrulaterul $QBNM$ este inscriptibil.

(Etapa judeţeană, 1986, Botoşani)

VII.G.48. Fie ABC un triunghi, M piciorul înălţimii din A pe dreapta BC, N intersecţia înălţimii AM cu cercul circumscris triunghiului şi P, proiecţia lui N pe dreapta AC. Arătaţi că :

a) punctele C, P, M, N, sînt conciclice ;

b) dreapta MP este paralelă cu tangenta în A la cerc.

(Etapa locală, 1984, Prahova)

VII.G.49. Două cercuri oarecare $C(O_1, r_1)$ şi $C(O_2, r_2)$ sînt tangente exterioare în M. Prin M se duce secanta arbitrară AMB, $A \in C(O_1, r_1)$, $B \in C(O_2, r_2)$. Demonstraţi că tangentele la cercuri în punctele A şi B sînt paralele.

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VII.G.50. Tangenta în B la cercul de centru O, circumscris triunghiului ABC, intersectează dreapta AC în D. Cercul circumscris lui BCD intersectează dreapta AB în E. Arătaţi că :

a) triunghiul BDE este isoscel ;

b) cercul circumscris lui ACE este tangent dreptei DE ;

c) dreptele AO şi DE sînt perpendiculare.

(Etapa judeţeană, 1986, Prahova)

VII.G.51. În triunghiul ABC notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA şi respectiv AB. Bisectoarea AD, D pe segmentul BC, taie dreptele $A'B'$ şi $A'C'$ respectiv în E şi F. Fie H proiecţia lui A pe BC. Demonstraţi că :

a) punctele A, E, C, H sînt conciclice ;

b) dreptele CE şi BF sînt paralele.

VII.G.52 Fie H punctul comun înălțimilor triunghiului ABC și A' mijlocul laturii BC. Prelungim HA' cu segmentul $A'A''$ congruent cu HA'.

a) Demonstrați că A'' se află pe cercul circumscris triunghiului și că AA'' este diametrul acestui cerc.

b) Folosind acest rezultat, arătați că H, centrul de greutate al triunghiului și centrul cercului circumscris triunghiului sînt trei puncte coliniare.

(Etapa județeană, 1985, Caraș-Severin)

VII.G.53. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc de centru O, punctul H punctul de intersecție a înălțimilor sale, iar D punctul diametral opus vîrfului A. Arătați că :

a) patrulaterul $BDCH$ este paralelogram ;

b) distanța de la O la latura BC este $\frac{AH}{2}$.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VII.G.54. Fiind dat cercul (O) și tangenta în A la cerc, se consideră punctul C diametral opus lui A și un punct M pe cerc. Ducem din M perpendiculara MN pe tangenta în A la cerc. Fie P intersecția lui CN cu cercul și M' punctul diametral opus lui M. Dreapta $M'P$ intersectează tangenta în A la cerc în punctul B. Arătați că punctele C, M, B sînt coliniare.

(Etapa județeană, 1984, Tulcea)

VII.G.55. Un cerc $C(O, r)$ este tangent în T la dreapta d. Se duce o paralelă la dreapta OT, care se intersectează cu d în C și cu cercul în A și B (B este între A și C). Pe semidreapta AC se ia punctul F astfel ca $CF = AC$; se notează cu M punctul diametral opus lui B și cu E mijlocul segmentului FB. Arătați că :

a) punctele M, T, F sînt coliniare ;

b) triunghiul TEF este isoscel ;

c) patrulaterul $AOTE$ este inscriptibil.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

VII.G.56. Se consideră două cercuri de centre O și O' și raze r, R ($r < R$) astfel încît $C(O')$ trece prin O.

a) Dacă dreapta AA' și dreapta BB' sînt tangentele comune celor două cercuri, atunci dreapta $A'B'$ este tangentă la cercul de centru O.

b) Paralela dusă prin A la OO' intersectează dreapta $A'B'$ în S, iar dreapta $O'B'$ în C. Arătați că $AA'CB'$ este inscriptibil.

c) Dacă P și Q sînt picioarele perpendicularelor din C pe dreptele AA' respectiv AB', atunci P, S, Q sînt coliniare.

(Etapa județeană, 1984, Bacău)

VII.G.57. În triunghiul ABC, unghiul B are măsura egală cu semisuma măsurilor celorlalte două unghiuri. Bisectoarele interioare AM și CN ale unghiurilor A și C (M pe segmentul BC și N pe segmentul AB) se intersectează în Q.

a) Arătați că patrulaterul $NQMB$ este inscriptibil.

b) Arătați că triunghiul NQM este isoscel.

c) Determinați măsura unghiului A astfel încît $CN = CA$.

d) Fie P, respectiv T picioarele perpendicularelor duse din Q pe segmentele AB şi BC. Arătaţi că triunghiurile PQN şi QMT sînt congruente şi precizaţi natura triunghiului BPT.

e) Segmentele BQ şi MN se intersectează în R. Arătați că punctele P, R, T nu pot fi colinare.

(Etapa județeană, 1985, Neamț)

VII.G.58. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\widehat{BAC}) = 90°$). Se prelungeşte mediana CC' (C' pe segmentul AB), cu segmentul $C'D = 1/3 \cdot CC'$ şi CB cu segmentul $BE \equiv BC$. Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor :

p_1. „Oricare ar fi punctele A, D, E în ipoteza de mai sus, ele nu sînt conciclice".

p_2. „Oricare ar fi punctele A, D, B, construite ca mai sus, patrulaterul $ADBC$ este inscriptibil".

CAPITOLUL III

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

VII.G.59. Într-un triunghi isoscel OAB, $m(\widehat{AOB}) = 36°$. Fie C pe segmentul OB astfel încît $m(\widehat{CAB}) = 36°$. Demonstrați că $OC = AB = AC$. Triunghiurile ACO și AOB sînt asemenea ?

(Etapa județeană, 1984, Timiș)

VII.G.60. Prin vîrful A al paralelogramului $ABCD$ se duce o dreaptă care intersectează diagonala BD în punctul E, dreptele BC și DC în punctele F şi G. Arătaţi că AE este medie geometrică între EF și EG.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VII.G.61. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ şi un punct M interior segmentului AC. Paralela prin M la AB taie BC în N, iar paralela prin M la CD taie AD în P. Demonstrați că : $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.G.62. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care bisectoarea AF (F pe segmentul CD) a unghiului A este paralelă cu BC. Dreptele AF şi BD se intersectează în E. Dacă $BC^2 = CD \cdot EF$, atunci : $\frac{CD}{BC} - \frac{AB}{AD} = 1$.

(Etapa județeană, 1985, Suceava)

VII.G.63. Prin vîrful A al unui paralelogram $ABCD$, se duce o dreaptă exterioară ce intersectează dreptele CB şi CD în M şi N. Arătaţi că :

a) $BM \cdot DN$ este constant ;

b) $CM \cdot CN = AB \cdot CM + BC \cdot CN$.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

VII.G.64. Pe latura AB a unui triunghi ABC se ia punctul C'. Paralelele din A şi B la CC' intersectează dreptele BC şi AC respectiv în A' şi B'. Calculaţi lungimea segmentului CC' ştiind că $AA' = 3$ şi $BB' = 7$.

(Etapa judeţeană, 1986, Vaslui)

VII.G.65. Pe semidreapta OX se consideră punctele A, B, C iar pe semidreapta OY punctele A', B', C'. Dacă dreapta AB' este paralelă cu BA', şi dreapta BC' este paralelă cu dreapta CB' demonstraţi că dreapta AC' este paralelă cu dreapta CA'.

(Etapa locală, 1985, Timiş)

VIIG.66. Fie un trapez cu bazele de lungimi a, b. Prin punctul de intersecţie a diagonalelor lui se duce paralela la baze ce intersectează laturile neparalele în M şi N. Demonstraţi că $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

VII.G.67. Fiind dat un dreptunghi $ABCD$ şi o dreaptă d care taie dreptele AB, BC, CD, DA respectiv în M, N, P, Q, atunci avem următoarea relaţie :

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1.$$

VII.G.68. Bisectoarele unghiurilor B şi C ale triunghiului ABC taie linia mijlocie a triunghiului paralelă cu BC în M şi N. Demonstraţi că $AB + AC = BC + 2MN$.

(Etapa judeţeană, 1986, Mureş)

VII.G.69. În cercul $C(O, r)$ coarda AB subîntinde un arc de $120°$. Raza perpendiculară pe coarda AB intersectează cercul în punctul C. Pe latura OB a patrulaterului $AOBC$ se ia un punct arbitrar D. Dreapta CD intersectează dreapta OA în E. Arătaţi că $AC^2 = EA \cdot BD$.

(Etapa judeţeană, 1984, Caraş-Severin)

VII.G.70. Într-un triunghi oarecare ABC, bisectoarea unghiului A întîlneşte pe BC în D şi cercul circumscris triunghiului în E. Arătaţi că :

a) $AB \cdot AC = AE \cdot AD$;

b) $\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{AE}{DE}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

VII.G.71. Fie M mijlocul laturii BC a unui triunghi ABC, astfel încît $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle BCA$. Bisectoarea unghiului BAC intersectează segmentul BC în E, iar bisectoarea unghiului AMB intersectează segmentul AB în F. Arătaţi că :

a) $BC^2 = 2AB^2$;

b) punctele A, M, E, F sînt conciclice ;

c) dreptele EF şi AC sînt paralele.

(Etapa judeţeană, 1986, Teleorman)

VII.G.72. Printr-un punct P al bazei BC a unui triunghi oarecare ABC se duce o dreaptă paralelă cu mediana AD a triunghiului care taie dreapta AB în M şi dreapta AC în N. Demonstraţi relaţia :

$$AM \cdot AC = AN \cdot AB.$$

VII.G.73. În triunghiul ascuţitunghic ABC, fie înălţimea AD astfel încît $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$. Paralela prin C la dreapta AB intersectează dreapta AD în E. Demonstraţi că paralela prin E la dreapta AC trece prin mijlocul segmentului BC.

(Etapa judeţeană, 1986, Giurgiu)

VII.G.74. Fie ABC un triunghi ($BC = a$), AD o mediană în acest triunghi (D pe segmentul BC, $AD = m$) şi dreapta EF paralelă cu dreapta BC astfel încît $m(\widehat{EDF}) = 90°$ (E şi F aparţin segmentelor AB, respectiv AC) :

a) Calculaţi lungimea segmentului EF în funcţie de a şi m.

b) Ce relaţie există între a şi m dacă intersecţia segmentelor AD şi EF este centrul de greutate al triunghiului ABC ?

(Etapa judeţeană, 1986, Sibiu)

VII.G.75. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) = 90°$) se duce înălţimea AD (D pe segmentul BC). Bisectoarele unghiurilor ADB şi ADC taie catetele AB şi AC în punctele M şi N. Arătaţi că :

a) $AM = AN$;

b) $ND \cdot DB = DA \cdot DM$ şi $AD \cdot DN = CD \cdot DM$.

c) Dacă cercul circumscris triunghiului ADM taie a doua oară ipotenuza BC în E, arătaţi că E este punctul unde bisectoarea unghiului BAC întîlneşte latura BC şi că patrulaterul $AMEN$ este pătrat.

(Etapa judeţeană, 1986, Harghita)

VII.G 76. Fie ABC un unghi isoscel cu $AB = AC$, iar D şi E picioarele înălţimilor duse din A şi respectiv C. Notăm cu M mijlocul laturii AC, cu F intersecţia laturii AB cu tangenta în D la cercul circumscris triunghiului ADC. Demonstraţi că :

a) punctele A, C, D, E sînt conciclice ;

b) triunghiul MED este isoscel ;

c) dreapta MD este mediatoarea segmentului CE ;

d) dreptele DF şi AB sînt perpendiculare ;

e) $AD^2 = AC \cdot AF$.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

VII.G.77. Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$ și $AB < AC$; fie D mijlocul lui BC. Perpendiculara în D pe BC taie dreapta AC în E și dreapta BA în F. Fie H mijlocul lui FC și G mijlocul lui BE. Arătați că :

a) triunghiurile GAD și AHD sînt isoscele ;

b) patrulaterul $AEDB$ este inscriptibil ; găsiți centrul cercului circumscris ;

c) există relația $BC^2 = 4ED \cdot FD$;

d) dreptele BE și FC sînt perpendiculare.

(Etapa județeană, 1986, Arad)

VII.G.78. Într-un cerc de centru O se înscrie triunghiul isoscel ABC cu AC diametru în cerc. Fie M un punct oarecare al arcului mic subîntins de coarda AB. Dreptele AM și BC se intersectează în E, iar AB și MC în F. Arătați că :

a) punctele M, F, B, E sînt conciclice ;

b) triunghiul EBF este isoscel ;

c) dreptele EF și AC sînt perpendiculare ;

d) $AF \cdot FB = MF \cdot FC$;

e) triunghiurile AMF și ABE sînt asemenea.

(Etapa județeană, 1986, Alba)

VII.G.79. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic avînd laturile AB și CD paralele, $m(\widehat{A}) = 90°$, $DC = 2AD$, $AB = 3AD$. Dreptele AD și BC se intersectează în E. Dacă F este mijlocul segmentului DC, arătați că dreptele EF și AC sînt perpendiculare.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VII.G.80. Diagonalele $AC = m$ și $BD = n$ ale trapezului de baze $AB = b$ $CD = a$ se intersectează în punctul N.

a) Arătați că $b \cdot ND + a \cdot AN = a \cdot BN + b \cdot NC$.

b) Determinați $f(x) =$ perimetrul triunghiului ANB pentru $m = 2x + 2$, $n = 6 - x$, $a = 3$, $b = 2$, $x \in \mathbf{R}$. Determinați mulțimea valorilor lui f.

(Etapa județeană, 1985, Teleorman)

VII.G.81. În patrulaterul convex $ABCD$ se dau : $AC = \frac{96}{5}$, $BD = 4$, $OA = 16{,}7(9)$, $OD = 0{,}5$ și O este intersecția segmentelor AC și BD.

a) Arătați că dreptele AB și CD sînt paralele.

b) Determinați și motivați valoarea de adevăr a propoziției : „Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil“.

c) Determinați lungimea segmentului CD știind că se exprimă printr-un număr natural.

(Etapa județeană, 1985, Bacău)

VII.G.82. Se dă triunghiul isoscel ABC, unde $AB = AC$. Se prelungește BA cu segmentul AM congruent cu AB. Pe latura AC se ia punctul D astfel ca $AD = \frac{1}{3} \cdot AC$. Fie O mijlocul segmentului BC. Arătați că :

a) dreptele MC și BC sînt perpendiculare ;

b) triunghiurile AOD și CMD sînt asemenea ;

c) punctele : M, D, O sînt coliniare.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

VII.G.83. În triunghiul ABC, $m(\widehat{BAC}) = 60°$, BD și CE sînt înălțimi, iar O este mijlocul segmentului BC.

a) Demonstrați că triunghiul OED este echilateral.

b) Dacă $AC = 4$ cm și AB este de mărime variabilă, să se găsească valoarea minimă a lungimii laturii triunghiului OED.

(Etapa județeană, 1985, Timiș)

VII.G.84. Se dă un unghi cu vîrful în O și un cerc tangent la laturile sale în punctele A și B. Din punctul A se duce o semidreaptă paralelă cu dreapta OB care intersectează cercul în C. Segmentul OC intersectează cercul în E. Dreptele AE și OB se intersectează în K. Demonstrați că $OK = BK$.

(Etapa județeană, 1984, Dolj)

VII.G.85. Se dă un cerc și A un punct exterior. Fie dreapta AT și dreapta AS tangente la cerc (T, S pe cerc), și fie coarda TL paralelă cu dreapta AS. Segmentul AL taie a doua oară cercul în Q. Fie M mijlocul segmentului AS. Arătați că :

a) $\sphericalangle MAQ \equiv \sphericalangle ATQ$;

b) punctele T, Q, M, sînt coliniare.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VII.G.86. Cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ se intersectează în punctele A și B. Dreapta d_1 este tangentă în A la cercul $C(O_1, r_1)$ și intersectează $C(O_2, r_2)$ în C, iar dreapta d_2 este tangentă în B la $C(O_2, r_2)$ și intersectează $C(O_1, r_1)$ în D ; d_1 și d_2 se intersectează în M. Arătați că :

a) dreptele BC și AD sînt paralele ;

b) $AB^2 = AD \cdot BC$;

c) dacă O_2 este pe d_1 atunci O_1 este pe d_2.

(Etapa județeană, 1985, Cluj)

VII.G.87. În cercul de centru O se duc coardele AB și AM încît $m(\widehat{ABM}) > 90°$. Perpendiculara din B pe dreapta AM taie dreapta AM în D și cercul în N, iar dreapta AO taie cercul în R. Dreptele NR și AM se intersectează în Q, iar dreptele BM și NQ în P. Arătați că :

a) $\sphericalangle ARB \equiv \sphericalangle NQA$; patrulaterul $NRMB$ este trapez isoscel ; triunghiurile ANR și ADB sînt asemenea.

b) Dacă dreptele AN şi BP sînt paralele, atunci $m(\widehat{AOB}) = 90°$.

c) Dacă triunghiul NDP este echilateral, atunci $AB = AO$ şi $MR = MP = PQ$.

(Etapa judeţeană, 1984, Neamţ)

VII.G. 88. Se consideră o dreaptă e şi pe ea punctele : A_1, A_2, cu $A_1A_2 = 1$ cm. Se duc : a_1, a_2, perpendiculare pe e în A_1, A_2. Se iau pe a_1 punctele B_1, C_1 astfel ca $A_1B_1 = 2$ cm, $A_1C_1 = 7$ cm ; pe a_2 punctele B_2, C_2 astfel ca $A_2B_2 = 6$ cm, $A_2C_2 = 3$ cm. Fie M intersecţia segmentelor B_1B_2 şi C_1C_2, iar N piciorul perpendicularei din M pe e. Calculaţi MN şi A_1N.

(Etapa judeţeană, 1984, Dolj)

VII.G.89. Se dă hexagonul convex $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ avînd laturile A_1A_2 şi A_5A_4, A_2A_3 şi A_6A_5, A_3A_4 şi A_1A_6 respectiv paralele. Dreptele A_1A_6 şi A_2A_3 se intersectează în A, A_2A_3 şi A_5A_4 în B, iar A_5A_4 şi A_1A_6 în C. Dreptele A_1B şi A_2C se intersectează în M, A_3C şi A_4A se intersectează în N, A_5A şi A_6B P. Arătaţi că dreptele AM, BN şi CP sînt concurente.

(Etapa judeţeană, 1986, Olt)

VII.G.90. Fie trapezul $ABCD$ de baze AB şi CD şi O intersecţia diagonalelor. Paralela prin O la AD intersectează pe AB în P. Să se arate că dreapta OQ, Q pe segmentul AB, şi dreapta BC sînt paralele dacă şi numai dacă Q este simetricul lui P faţă de mijlocul M al laturii AB.

(Etapa judeţeană, 1986, Dîmboviţa)

VII.G.91. ABC este un triunghi ascuţitunghic. Se dau : D pe segmentul BC şi E pe segmentul BC astfel încît $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$. Fie G şi respectiv F picioarele perpendicularelor duse din D pe AC şi din E pe AB. În cazul cînd $AF = AG$, stabiliţi dacă :

a) triunghiul ABC este isoscel ;

b) M fiind intersecţia dreptelor EF şi DG, dreptele AM şi BC sînt perpendiculare.

(Etapa municipală, 1984, Bucureşti)

VII.G.92. Triunghiul ABC este dreptunghic în A iar M este mijlocul catetei AB. Perpendiculara în M pe AB intersectează dreapta BC în O. Fie N pe segmentul BC, ($N \neq O$) astfel încît $\sphericalangle CMO \equiv \sphericalangle NMO$. Paralela prin N la dreapta AB se intersectează dreptele CM, AC respectiv perpendiculara în B pe AB, în punctele : T, L, R. Stabiliţi dacă :

a) $ATNB$ este trapez isoscel ;

b) punctele A, T, O, sînt coliniare ;

c) segmentele LT, TN, NR sînt congruente.

(Etapa municipală, 1986, Bucureşti)

VII.G.93. $ABCD$ este un patrulater înscris în cercul de centru O, iar E, F, G, H sînt simetricele lui O faţă de dreptele AB, BC, CD şi respectiv DA.

a) Arătaţi că punctele E, F, G, H sînt vîrfurile unui paralelogram.

b) În ce situaţie, punctele E, F, G, H sînt vîrfurile unui pătrat ?

(Etapa municipală, 1983, Bucureşti)

VII.G.94. Trapezul $ABCD$ are diagonalele AC şi BD perpendiculare (baza mare este AB). Paralela prin A la dreapta BD intersectează dreptele DC şi BC în punctele P, respectiv H ; perpendiculara din H pe dreapta DC intersectează dreapta AC în S.

a) Cercetaţi dacă dreptele BC şi PS sînt perpendiculare.

b) Fie O_1 centrul cercului circumscris triunghiului ACP. Fie O_2 centrul cercului circumscris triunghiului RCA (R este intersecţia dreptelor DC şi HS). Stabiliţi dacă triunghiurile CO_1O_2 şi CDB au laturile respectiv proporţionale.

(Etapa municipală, 1984, Bucureşti)

VII.G.95. Fie $A'B'C'$ un triunghi dat. Se construiesc în exterior, pe laturile unui triunghi ABC, triunghiurile BCI, CAJ, ABK asemenea cu triunghiul $A'B'C'$ astfel ca în jurul vîrfului A să fie situate unghiurile congruente cu A', ş.a.m.d. Arătaţi că :

a) Cercurile circumscrise triunghiurilor BCI, CAJ şi ABK trec prin acelaşi punct M.

b) Laturile triunghiului ABC sînt văzute din M sub unghiuri suplementare unghiurilor triunghiului $A'B'C'$.

c) Centrele U, V, W ale cercurilor circumscrise triunghiurilor construite pe laturi formează un triunghi asemenea cu triunghiul $A'B'C'$.

d) Dreptele AI, BJ, CK sînt concurente în M.

e) Segmentele AI, BJ, CK sînt invers proporţionale cu laturile triunghiului $A'B'C'$.

(Etapa judeţeană, 1984, Galaţi)

VII.G.96. Fie $ABCD$ un trapez avînd baza mare $AB = 24$ cm, iar $CD = 15$ cm. Pe AB se ia un punct M, astfel ca $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$ şi pe latura CD un punct N, astfel ca $\frac{DN}{NC} = \frac{2}{3}$. Calculaţi raportul în care dreapta MN împarte pe EB, unde E este punctul de intersecţie al dreptelor AD şi BC.

(Etapa judeţeană, 1984, Arad)

VII.G.97. Fie triunghiul ABC şi D, E, F, G, H respectiv mijloacele segmentelor BC, AD, BD, ED, EF. Dreptele GH şi AC se intersectează în I, iar BE şi AC în J.

Atunci :

a) $AI = 3IC$;

b) $HI = 3GH$;

c) $BE = 3EJ$.

(Etapa judeţeană, 1985, Gorj)

VII.G.98. Se dă rombul $ABCD$ în care $m(\widehat{A}) = 60°$. Fie G pe segmentul AB astfel încît $GB = 2AG$. Dreapta DG intersectează dreapta BC în E şi fie F pe segmentul EC astfel încît $FC = 2EF$. Dreptele AF şi DG se intersectează în H. Demonstraţi că :

a) patrulaterul $ADBF$ este romb ;

b) H este mijlocul lui DE ;

c) patrulaterul $ADFE$ este paralelogram ;

d) patrulaterul $ADCF$ este patrulater inscriptibil ;

e) dacă o dreaptă arbitrară d trece prin G şi intersectează segmentul DF, atunci suma distanţelor de la A şi D la dreapta d este egală cu distanţa de la F la această dreaptă.

(Etapa judeţeană, 1986, Brăila)

VII.G.99. Se dă triunghiul oarecare ABC şi se iau pe laturile BC şi AC respectiv punctele interioare M şi N astfel încît $MC \equiv \frac{1}{3} \cdot BC$ şi $AN = \frac{1}{4} \cdot AC$. Dreapta AM intersectează dreapta BN în P, iar paralela prin M la dreapta AB intersectează dreapta BN în D.

a) Determinaţi valoarea raportului $\frac{AP}{PM}$.

b) Arătaţi că PC este mediană în triunghiul SDC, unde S este simetricul lui C faţă de B.

(Etapa judeţeană, 1985, Timiş)

CAPITOLUL IV

RELAŢII METRICE

VII.G.100. Dacă în triunghiul dreptunghic ABC, AD este înălţime, iar E şi F sînt proiecţiile punctului D pe catetele AB şi AC, demonstraţi relaţia :

$$DB \cdot DC = FC \cdot FA + EB \cdot EA$$

(Etapa judeţeană, 1986, Braşov)

VII.G.101. Se consideră un segment AB şi un punct M în interiorul său. Se construiesc de aceeaşi parte a dreptei AB pătratele $AMNP$ şi $BMDC$. Să se demonstreze că $\frac{PC}{NB}$ este acelaşi oricare ar fi poziţia lui M în interiorul segmentului AB.

(Etapa judeţeană, 1986, Timiş)

VII.G.102. Fie AC diagonala mai mare a paralelogramului $ABCD$. Se duce din punctul C cîte o perpendiculară pe dreptele AB, respectiv AD ; fie picioarele lor E, respectiv F. Demonstraţi că :

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

(Etapa judeţeană, 1985, Gorj)

VII.G.103. În triunghiul ABC, lungimea laturii BC este 5 cm, iar lungimile medianelor CC' şi BB' sînt de 6 cm şi respectiv 4,5 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului ABC.

(Etapa judeţeană, 1984, Gorj)

VII.G.104. În triunghiul ABC se duc înălţimile AD şi CE. Demonstraţi că :

a) $AB \cdot BE = BC \cdot BD$.

b) Dacă H este ortocentrul triunghiului, atunci $AD \cdot HD = BD \cdot CD$.

Particularizare pentru cazul $m(\widehat{A}) = 90°$.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

VII.G.105. Să se calculeze perimetrul şi diagonalele unui trapez înscris într-un cerc de rază $r = 75/2$ cm, care ara baza mică de 51 cm, iar baza mare este diametrul cercului.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

VII.G.106. Printr-un punct M de pe diagonala BD a unui dreptunghi $ABCD$ se duce o dreaptă perpendiculară pe dreapta BD care taie dreapta AB în E şi dreapta BC în F. Arătaţi că :

a) $AB^2 \cdot ME = BC^2 \cdot MF$;

b) oricare ar fi poziţia punctului M pe BD, raportul :

$$\frac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{MB} \text{ este constant.}$$

(Etapa judeţeană, 1986, Bistriţa-Năsăud)

VII.G.107. În dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = a$, $BC = b$, $a > b$, fie M mijlocul segmentului AB şi N mijlocul segmentului BC.

a) Găsiţi relaţia între a şi b pentru ca triunghiul NMD să fie dreptunghic.

b) Arătaţi că triunghiul NMD nu poate fi isoscel.

(Etapa judeţeană, 1986, Sibiu)

VII.G.108. Dacă între două triunghiuri dreptunghice asemenea de catete b, c respectiv b', c' şi ipotenuze a respectiv a' avem relaţia :

$aa' = bc' + b'c$, atunci triunghiurile sînt isoscele.

(Etapa judeţeană, 1986, Timiş)

VII.G.109. În pătratul de latură a, fie Q pe segmentul DC şi P pe segmentul BC astfel încît $m(\widehat{QAP}) = 30°$; $m(\widehat{APQ}) = 90°$. Calculaţi lungimile laturilor triunghiului APQ.

(Etapa judeţeană, 1986, Prahova)

VII.G.110. În triunghiul ABC, cu laturile de lungimi a, b, c, se dau : $BC = a = 10$ cm și medianele $BB' = 9$ cm, $CC' = 12$ cm. (B', C' pe segmentele AC, AB).

a) Arătați că $5a^2 = b^2 + c^2$.

b) Se prelungesc medianele CC' și BB' cu segmentele $C'N \equiv CC'$ respectiv $B'M \equiv BB'$. Dacă AD este înălțime în triunghiul ABC, arătați că triunghiul DMN este isoscel.

c) Demonstrați că medianele triunghiului ABC pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

(Etapa județeană, 1985, Argeș)

VII.G.111. Se dă triunghiul echilateral ABC. Fie AD înălțime în acest triunghi, D pe segmentul BC. Se construiește A' simetricul lui A față de dreapta BC și D' simetricul lui D față de dreapta AC.

a) Arătați că triunghiul $AA'D'$ este dreptunghic.

b) Fie M punctul de intersecție a dreptelor AA' și BD'. Dreapta MC intersectează dreapta AB în F. Exprimați lungimile segmentelor BD' și CF, în funcție de laturile triunghiului ABC.

(Etapa județeană, 1984, Tulcea)

VII.G.112. Se dă un cerc de rază r și un diametru al lui, AB. În A și B se duc perpendicularele AX, respectiv BY pe diametru. Printr-un punct oarecare M de pe cerc se duce tangenta la cerc, care taie dreapta AX în N și dreapta BY în P. Demonstrați că, oricum am alege punctul M pe cerc, există relația :

$$r^2 = AN \cdot BP.$$

(Etapa județeană, 1984, Hunedoara)

VII.G.113. Se dă un triunghi oarecare ABC. Pe latura BC se ia punctul D astfel încît $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$ și punctul E astfel încît $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle ABE$. Demonstrați că :

a) $AB^2 = BD \cdot BC$;

b) $AC^2 = CE \cdot BC$;

c) triunghiul ADE este isoscel ;

d) $AD^2 = BD \cdot CE$.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VII.G.114. Arătați că în orice triunghi, produsul lungimilor oricăror două laturi este egal cu produsul dintre înălțimea celei de-a treia laturi și diametrul cercului circumscris triunghiului.

(Etapa județeană, 1986, Harghita)

VII.G.115. Se dă cercul de diametru AB. Două semidrepte cu originea în A intersectează cercul în E și F, iar tangenta în B la cerc în punctele C respectiv D. Tangenta în F la cerc intersectează dreapta CB în G.

a) Stabiliți dacă triunghiul FGD este isoscel.

b) În cazul cînd O este centrul cercului și punctele E și F sînt diametral opuse, cercetați dacă $2OG^2 = GD \cdot DC$.

(Etapa municipală, 1986, București)

VII.G.116. Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal înscris în cercul de centru O. Dacă M este mijlocul coardei AB, arătați că $OM < CD$.

(Etapa județeană, 1985, Brașov)

VII.G.117. Fie cercul $C(O, r)$ și A pe cerc. Fie B simetricul lui O față de A. Prin mijlocul segmentului OA se construiește o coardă variabilă PQ (P și Q aparțin cercului). Arătați că $PB + BQ = 2PQ$.

(Etapa județeană, 1985, Vîlcea)

VII.G.118. Triunghiul ABC, avînd $BC = 1$ și lungimile laturilor AB și AC numere naturale, este înscris în cercul de rază r, $\frac{5}{2} < r < \frac{7}{2}$. Să se calculeze AB, AC și diametrul cercului circumscris triunghiului ABC.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

VII.G.119. Pe laturile AB și AD ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele M și N astfel încît $AM = AN$. Fie E și F proiecțiile punctului A pe DM și BN. Demonstrați că :

a) $\triangle AEN \sim \triangle DEC$;

b) $AF \cdot FC = BF \cdot FM$;

c) dreptele CE și NE sînt perpendiculare ;

d) punctele B, C, F, M sînt conciclice.

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

INDICAȚII

VII.G.1. Găsiți două triunghiuri congruente.

VII.G.2. a) O sugestie mai generală : introduceți o notație pentru mărimile egale ; fie $m(\widehat{BAA'}) = \alpha$.

b) H este ortocentrul triunghiului ABC.

VII.G.3 Triunghiul $AA'D'$ este dreptunghic.

VII.G.4. Construiți mediana corespunzătoare ipotenuzei.

VII.G.5. Arătați că triunghiul EAO este isoscel.

VII.G.6. Folosiți proprietatea punctelor situate pe bisectoarea unui unghi.

VII.G.7. Se compară elementele triunghiurilor MAB și MAD.

VII.G.8. Fie $ABCD$ trapezul și O punctul de intersecție a diagonalelor lui. Arătăm că oricare ar fi O' din interiorul trapezului, $O' \neq O$, avem :

$$OA + OB + OC + OD < O'A + O'B + O'C + O'D.$$

VII.G.9. a) Este util să notăm $a + b + c = 2p$.

b) Întrucît a, b, c sînt arbitrare, este suficient să arătăm că :

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

VII.G.10. Folosim propoziția : „O sumă de numere pozitive este zero dacă și numai dacă fiecare termen al sumei este nul".

VII.G.11. Folosim axioma de determinare a dreptei : „Fiind date două puncte distincte, există o singură dreaptă care le conține".

VII.G.12. Ideea este să „mutăm" cele 101 puncte din interiorul pătratului pe o dreaptă. Cum ? Proiectîndu-le (pe o dreaptă anume) !

VII.G.13. Găsiți un triunghi echilateral.

VII.G.14. Remarcați trei triunghiuri congruente între ele.

VII.G.15. Folosim teorema : „Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă unghiurile formate de diagonale cu laturile opuse sînt congruente".

VII.G.16. Toate informațiile necesare le găsim în figura 16 :

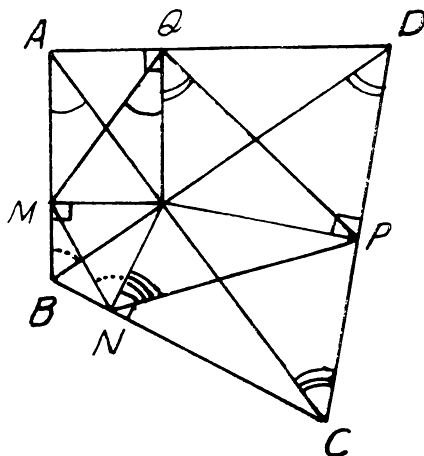


Fig. VII. G. 16

VII.G.17. Observați că dreptele MN și BC sînt paralele.

VII.G.18. $MNPQ$ este trapez isoscel.

VII.G.19. b) Patrulaterele $AODC$ și $BOCD$ sînt romburi.

VII.G.20. $BPCT$ este paralelogram.

VII.G.21. Observăm că patrulaterul $AICB$ este inscriptibil.

VII.G.22. Atenție la cuvintele „dacă și numai dacă". Avem de demonstrat două teoreme.

VII.G.23. Problema este echivalentă cu următoarea : „Triunghiul ABC este isoscel $\Leftrightarrow$ $MNQP$ este inscriptibil".

VII.G.24. Apelăm la proprietatea punctelor situate pe mediatoarea unui segment.

VII.G.25. Folosim problema anterioară şi faptul că un triunghi isoscel avînd un unghi de 60° este echilateral.

VII.G.26. Găsiţi trei patrulatere inscriptibile.

VII.G.27. Fie O_1, O_2 centrele cercurilor de diametri OA, respectiv OB. Putem arăta : fie că mediana din O a triunghiului COD trece prin punctul de intersecţie a cercurilor de centre O_1 şi O_2 ; fie că dreapta determinată de punctele de intersecţie a cercurilor $\mathcal{C}(O_1, O_1A)$, $\mathcal{C}(O_2, O_2B)$ este chiar mediana din O a triunghiului COD.

VII.G.28. Căutăm o construcţie auxiliară convenabilă astfel încît să obţinem triunghiuri congruente.

VII.G.29. Arătăm că $\sphericalangle BEF \equiv \sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle DCF$.

b) Atenţie ! Ce unghiuri pot fi congruente în triunghiul isoscel AEF ?

c) Pentru prescurtarea calculului, notăm $m(\widehat{AFE}) = \alpha$.

VII.G.30. T este punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului $ABMC$.

VII.G.31. a) Aplicaţi teorema despre măsura unghiului format de o coardă cu tangenta la cerc ; evaluaţi unghiuri şi arce.

VII.G.32. Triunghiurile ADE şi MDE sînt dreptunghice.

VII.G.33. Dacă P este punctul de tangenţă al celor două cercuri, atunci triunghiul NPM este dreptunghic.

VII.G.34. Folosiţi informaţiile din fig. 34 :

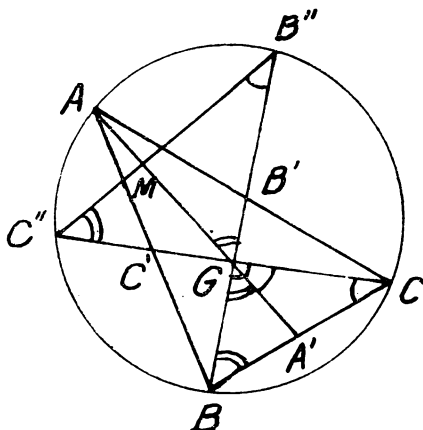


Fig. VII. G. 34

VII.G.35. Ca întotdeauna cînd lucrăm o problemă de construcţii geometrice, o considerăm rezolvată. Iată un desen sugestiv : (v. fig. 35).

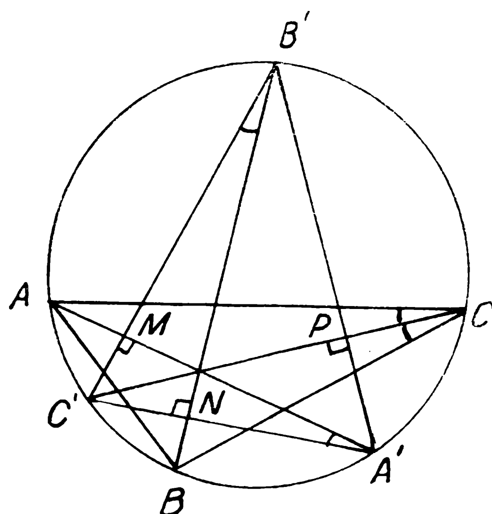


Fig. VII. G. 35

VII.G.36. Atenţie ! Punctul de intersecţie a coardelor AB şi CD poate fi interior cercului, sau exterior lui.

VII.G.37. Arătăm fie că $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{EC}$, fie că dreptele AD, BE conţin laturile opuse ale unui paralelogram, fie că apar unghiuri alterne interne congruente...

VII.G.38. Remarcăm patrulaterele inscriptibile şi triunghiuri isoscele. Atenţie ! M poate fi între A şi mijlocul segmentului AB, sau între B şi mijlocul lui AB.

VII.G.39. Sînt posibile mai multe situaţii, dar obţinem soluţii diferite ale problemei în următoarele două cazuri : I. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează în interiorul patrulaterului cu vîrfurile G, H, I, J ; II. Diagonalele dreptunghiului se intersectează în exteriorul acelui patrulater.

VII.G.40. Analizăm următoarele situaţii : $AC > AB$, $AC < AB$, $AC = AB$. Remarcăm simetria figurii.

VII.G.41. a) Evaluăm unghiurile triunghiurilor A_1B_1B şi A_2C_2C.

b) O aparţine bisectoarei unghiului A.

VII.G.42. Pentru prescurtarea redactării, să notăm $m(\widehat{BAC}) = 3\alpha$, $m(\widehat{ABC}) = 3\beta$.

a) Demonstrăm prin reducere la absurd.

b) Calculăm măsuri de unghiuri şi remarcăm triunghiuri isoscele.

VII.G.43. a) Să cercetăm cu atenţie fig. 43 ; cheia o găsim acolo !

b) După 6 paşi.

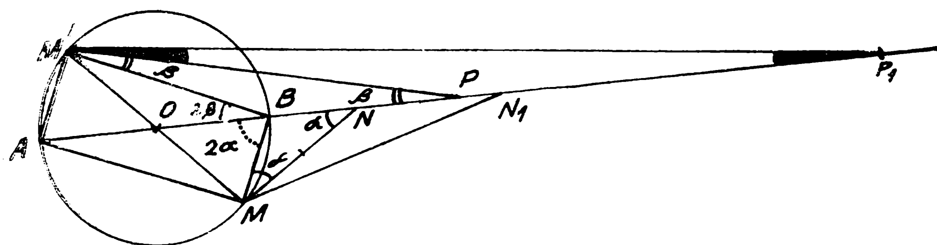


Fig. VII. G. 43

VII.G.44. a) Remarcăm arce congruente.

b) Putem rezolva o problemă de coliniaritate bazîndu-ne pe teorema de unicitate a perpendicularei duse dintr-un punct pe o dreaptă.

VII.G.45. Avem de arătat că dreapta BD este mediatoarea segmentului AC. Să folosim informaţia utilă că, dacă un patrulater convex $ABCD$ îndeplineşte condiţia $AB + CD = BC + AD$, atunci acel patrulater este circumscriptibil unui cerc.

VII.G.46. Fie $ABCD$ trapezul, avînd laturile AB şi CD paralele. Este convenabil să notăm $AB = 2x$, $CD = 2y$.

VII.G.47. Uneori, pentru a rezolva o problemă de coliniaritate este util să folosim următoarea propoziţie :

Fie $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle AOC$, două unghiuri situate în acelaşi semiplan determinat de dreapta OA. Dacă $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle AOC$, atunci punctele O, B, C, sînt coliniare.

VII.G.48. a) Remarcăm două unghiuri drepte.

b) Căutăm unghiuri congruente.

VII.G.49. Construim tangenta comună celor două cercuri.

VII.G.50. a), b) Folosim teorema despre măsura unghiului format de o coardă cu tangenta la cerc şi reciproca ei.

c) Fie F intersecţia dreptelor AO şi ED. Căutăm un triunghi care să aibă unghiurile respectiv congruente cu cele ale triunghiului AFD.

VII.G.51. a) Arătăm că triunghiul AEB' este isoscel, apoi că triunghiul AEC este dreptunghic.

b) Analog cu a).

VII.G.52. a) Dacă într-un patrulater diagonalele se intersectează în mijlocul fiecăreia, atunci acel patrulater este paralelogram.

b) Centrul de greutate al unui triunghi împarte o mediană în raportul $\frac{1}{2}$ (şi reciproc).

VII.G.53. a) Putem arăta că BDCH este paralelogram demonstrînd fie că laturile opuse sînt paralele, fie că unghiurile opuse sînt congruente.

b) Fie E proiecţia lui O pe BC. Arătăm că OE este linie mijlocie în triunghiul AHD.

VII.G.54. Arătăm că $m(\widehat{CMB})$ este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului OCM.

Altfel : folosim axioma paralelelor.

Altfel : arătăm că unghiurile AMB şi AMC sînt drepte.

VII.G.55. a) Arătăm că $\sphericalangle MTO \equiv \sphericalangle TFB$ şi cum dreptele OT şi BF sînt paralele, rezultă că dreptele MT şi TF coincid.

Altfel : arătăm că dreptele MT şi TF sînt paralele cu dreapta determinată de B şi punctul diametral opus lui T.

Altfel : arătăm că unghiurile BTM şi BTF sînt drepte, sau că unghiurile MTO şi CTF sînt complementare.

c) Notăm, pentru rapiditatea calculului, $m(\widehat{EFT}) \equiv \alpha$.

VII.G.56. a) Fie M intersecţia dreptelor $A'B'$ şi OO'. Demonstrăm că dreptele $A'B'$ şi OO' sînt perpendiculare, iar $OM = OA = r$.

c) Arătăm că $\sphericalangle SQC \equiv \sphericalangle PQC$.

VII.G.57. a) Folosim faptul că $\sphericalangle AQN$ este unghi exterior triunghiului AQC...

b) Observăm că dreapta BQ este bisectoarea unghiului NBM...

c) R : $m(\widehat{BAC}) = 80°$.

e) Raţionăm prin reducere la absurd.

VII.G.58. a) Trei puncte sînt coliniare dacă şi numai dacă nu sînt conciclice. Deci rezolvăm o problemă de coliniaritate.

b) Vom arăta că *există* triunghiuri ABC astfel încît punctul D, construit conform ipotezei, să nu aparţină cercului circumscris acestui triunghi. Este suficient *să găsim* un singur astfel de triunghi. Va rezulta că p_2 este falsă.

VII.G.59. Triunghiurile OAB şi ABC sînt asemenea.

VII.G.60. Aplicăm teorema lui Thales.

VII.G.61. Două triunghiuri sînt asemenea ; se găsesc cu teorema fundamentală a asemănării.

VII.G.62. Apelăm la teorema bisectoarei ; prelucrăm relaţia din ipoteză.

VII.G.63. Pentru rapiditatea calculelor, introducem următoarele notaţii : $CD = a$, $BC = b$, $MB = x$, $ND = y$.

VII.G.64. Remarcăm două perechi de triunghiuri asemenea.

VII.G.65. Folosim teorema lui Thales şi reciproca ei.

VII.G.66. Din multitudinea grupelor de triunghiuri asemenea trebuie să alegem pe acelea care duc mai rapid la rezultat. Fie $ABCD$ trapezul cu $AD = a$, $BC = b$ și O punctul de intersecție a diagonalelor. Avem triunghiurile asemenea: AOD și COB; ABD și MBO; BCD și OND. Calculăm OM și ON folosind proporții derivate. (Se poate demonstra mai întîi că $MO = ON$, după care calculele se simplifică).

VII.G.67. Alegem următoarele grupe de triunghiuri asemenea: AMQ și BMN; PNC și PQD.

VII.G.68. Problema impune analizarea situațiilor posibile. Un indiciu care să ne ajute să discernem cele două cazuri distincte, ne dă următoarea teoremă:

În orice triunghi, bisectoarea unui unghi este situată între înălțimea și mediana corespunzătoare aceluiași vîrf.

Demonstrația teoremei (vezi fig. 68).

Fie ABC un triunghi și H, D, M respectiv piciorul înălțimii, bisectoarei și medianei corespunzătoare vîrfului A. Dacă $AB = AC$, rezultă $H = D = M$. Presupunem $\hat{B} > \hat{C}$. Rezultă că $AC > AB$. Conform teoremei bisectoarei, avem:

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} < 1$. Deci $BD < CD$, deci $BD < BM$. Rezultă că D se află între B și M (1).

Arătăm că H se află între B și D. Dacă $m(\hat{B}) \geqslant 90°$, acest lucru este evident. Fie $m(\hat{B}) < 90°$. Cum $\hat{B} > \hat{C}$, rezultă că $\widehat{BAH} < \widehat{HAC}$. Dar $m(\widehat{BAH}) + m(\widehat{HAC}) = m(\widehat{BAC})$, deci $m(\widehat{BAH}) < \frac{m(\widehat{BAC})}{2} = m(\widehat{BAD})$. Deci $\widehat{BAH} < \widehat{BAD}$. Rezultă că $BH < BD$, deci H este între B și D (2).

Din (1) și (2) rezultă că D este între H și M.

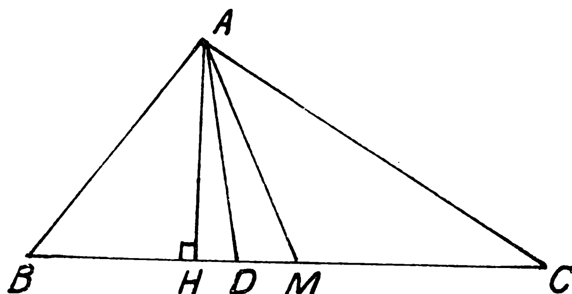


Fig. VII. G. 68

VII.G.69. Triunghiurile BCD și AEC sînt asemenea.

VII.G.70. Triunghiurile ABD, AEC, CED sînt asemenea.

VII.G.71. Triunghiurile ABM și CBA sînt asemenea.

VII.G.72. Aplicăm teorema lui Thales. Pentru a obține o altă soluție, construim prin C o paralelă la segmentul AD; sau prin N o paralelă la BC.

VII.G.73. Remarcăm triunghiuri asemenea și folosim raportul dat. Altfel : fie M, F punctele în care paralela prin E la dreapta AC intersectează segmentele BC, respectiv AB. Demonstrăm că punctele B, E, C, F sînt vîrfurile unui paralelogram.

Altfel : demonstrăm că FM este linie mijlocie în triunghiul BAC.

VII.G.74. Remarcăm triunghiuri asemenea și segmente congruente.

VII.G.75. c) Arătăm că dreapta AE este mediană în triunghiul isoscel AMN.

VII.G.76. a) Folosim teorema medianei corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic.

c) Arătăm că dreapta MD este bisectoare în triunghiul isoscel CME, evaluînd arcele ED și CD.

VII.G.77. a) $AG = \frac{BE}{2} = DG$.

c) $AEDB$ și $AFCD$ sînt inscriptibile.

VII.G.78. a) Remarcăm unghiurile drepte.

c) F este ortocentrul unui triunghi.

d) Triunghiurile ACF și MBF sînt asemenea.

VII.G.79. Fie S intersecția dreptelor EF și AC; evaluăm unghiurile triunghiului CFS. Altfel : F este ortocentrul unui triunghi.

VII.G.80. a) Triunghiurile ABN și CDN sînt asemenea. Pentru un calcul rapid, folosim o proporție derivată.

b) Ținem cont de faptul că un număr poate reprezenta lungimea unui segment dacă este pozitiv.

VIIG.81. b) Folosim raționamentul prin reducere la absurd.

c) Folosim relații de inegalitate între laturile unui triunghi.

VII.G.82. a) Notăm $\alpha = m(\widehat{ACB})$, $\beta = m(\widehat{ACM})$. Arătăm că $\alpha + \beta = 90°$.
b) AO este linie mijlocie în triunghiul BCM.

VII.G.83. a) Arătăm că triunghiurile AED și ACB sînt asemenea.

b) Interpretăm cu atenție datele pentru a stabili ce elemente sînt fixe și ce elemente sînt variabile. Apoi aplicăm una din teoremele de minim învățate.

VII.G.84. Arătăm că triunghiurile AOK și EOK sînt asemenea și folosim puterea punctului K față de cerc.

VII.G.85. a) Unghiul ATQ este format de o coardă cu tangenta la cerc.

b) Fie N intersecţia dreptele TQ şi AS. Din triunghiurile asemenea care apar, se pot evalua NA şi NS.

VII.G.86. a) Arătăm că cele două drepte determină cu secanta AC unghiuri corespondente congruente.

Altfel : folosim reciproca teoremei lui Thales.

b) Triunghiurile ABC şi DAB sînt asemenea.

c) Arătăm că unghiul AO_1B este unghi exterior triunghiului ADO_1.

VII.G.87. Se observă mai multe perechi de unghiuri congruente.

VII.G.88. Depinzînd de aşezarea punctelor B_1, C_1 şi B_2, C_2 respectiv pe dreptele a_1 şi a_2, apar mai multe situaţii.

VII.G.89. Demonstrăm mai întîi următoarea lemă : „Dreapta determinată de punctul de intersecţie a laturilor neparalele ale unui trapez şi de punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului trece prin mijlocul fiecărei baze."

VII.G.90. Aplicăm teorema bimedianei în trapez.

VII.G.91. Fie R intersecţia segmentelor AD şi EF, S intersecţia segmentelor AE şi DG.

a) Arătăm că obţinem succesiv următoarele congruenţe de triunghiuri $\triangle FAR \equiv \triangle GAS$; $\triangle FAM \equiv \triangle GAM$; $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$.

Altfel : $\triangle AFE \equiv \triangle AGD$;

Altfel : Triunghiurile FMG, MDE sînt isoscele. Putem deci forma proporţia $\frac{MD}{MG} = \frac{ME}{MF}$. Aplicăm reciproca teoremei lui Thales.

b) Dreapta AM este bisectoarea dusă din vîrful unui triunghi isoscel.

VII.G.92. a) $\triangle BMN \equiv \triangle AMT$.

b) Arătăm că $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle TAB$.

c) $\triangle ABC \backsim \triangle LNC$.

VII.G.93. a) Folosim teorema : „Mijloacele laturilor unui patrulater sînt vîrfurile unui paralelogram".

b) Cercetaţi diagonalele patrulaterului dat.

VII.G.94. a) Demonstrăm că C este ortocentrul triunghiului PHS.

b) Arătăm că dreapta O_1O_2 este paralelă cu dreapta BD.

VII.G.95. a) Fie M cel de-al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor BCI şi ACJ. Demonstrăm că M este situat pe cercul circumscris triunghiului ABK.

c) Folosim teorema : „Coarda comună a două cercuri secante este perpendiculară pe linia centrelor".

d) Această problemă de concurenţă este echivalentă cu una de coliniaritate...

e) Arătăm că $\triangle AJB \sim \triangle ACK$, şi alte relaţii analoage.

VII.G.96. Să cercetăm natura patrulaterului *AMND*... Fie *P* intersecţia dreptelor *MN* şi *BC*. Obţinem $\frac{EP}{BP}=\frac{1}{3}$.

VII.G.97. c) „Prelungim" mediana *BE* cu un segment *EM* congruent cu *BE*.

VII.G.98. e) Trebuie să introducem în calcule punctul fix *G*. Facem aceasta construind prin *G* o perpendiculară pe dreapta *d*...

VII.G.99. a) Construim prin *M* o paralelă la *BN*... $\frac{AP}{PM}=\frac{1}{2}$!

b) Arătăm că *P* este centrul de greutate al triunghiului *SCD*.

VII.G.100. Se aplică teorema înălţimii în triunghiurile : *ABC, ADC, ABD*.

VII.G.101. Pentru rapiditatea calculului, notăm $AM = x$, $MB = y$.

VII.G.102. Apelăm la teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice formate.

VII.G.103. Numerele 3, 4, 5 sînt pitagorice.

VII.G.104. a) Punctele *A, E, C, D* sînt conciclice.

b) $\triangle ABD \sim \triangle CHD$.

VII.G.105. Trapezul este isoscel.

VII.G.106. a) Dintre numeroasele triunghiuri asemenea ale figurii, să alegem două : $\triangle FBM \sim \triangle BDA$. Mai departe ne conduce teorema înălţimii.

b) Folosim tot ce am aflat la a). Obţinem :

$$\frac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{MB} = AB + BC.$$

VII.G.107. a) Aplicăm teorema lui Pitagora şi reciproca ei. Atenţie ! Oricare din unghiurile triunghiului *NMD* poate fi drept ?

b) Raţionăm prin reducere la absurd.

VII.G.108. Ţinem cont de faptul că, dacă înmulţim ambii membri ai unei identităţi cu un număr, egalitatea se păstrează.

VII.G.109. Problema conţine multe informaţii şi pare uşor de abordat. Dificultatea constă în a alege drumul ce ne conduce cît mai rapid la soluţie. Introducem următoarele notaţii : $BP = x$, $QC = y$, apoi observăm triunghiuri asemenea şi formăm proporţii derivate . . .

VII.G.110. Folosim teorema medianei:

Într-un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c, mediana m_a corespunzătoare laturii a satisface relaţia: $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$.

Demonstraţie (v. fig. 110):

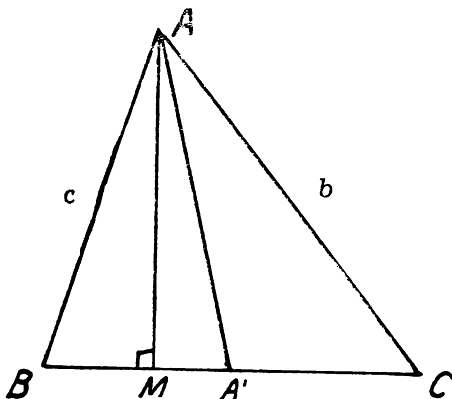


Fig. VII. G. 110

În triunghiul ABC, fie A' mijlocul lui BC şi M proiecţia lui A pe BC. În triunghiul dreptunghic AMA', avem: $AA'^2 = AM^2 + A'M^2$. **(1)**

În triunghiul dreptunghic AMC, avem: $b^2 = AM^2 + MC^2 = AM^2 + \left(A'M + \frac{a}{2}\right)^2 = AM^2 + A'M^2 + aA'M + \frac{a^2}{4}$. De aici rezultă:

$$AM^2 + A'M^2 = b^2 - aA'M - \frac{a^2}{4}. \qquad (2)$$

Analog, din triunghiul dreptunghic AMB, obţinem:

$$AM^2 + A'M^2 = c^2 + aA'M - \frac{a^2}{4}. \qquad (3)$$

Însumînd relaţiile (2) şi (3) şi înlocuind în (1), rezultă relaţia căutată.

VIII.G.111. a) Arătăm mai întîi că punctele A', C, D' sînt coliniare.

b) Fie a lungimea laturii triunghiului echilateral ABC. Obţinem $BD' = a\frac{\sqrt{7}}{2}$; $CF = a\frac{\sqrt{7}}{3}$.

VII.G.112. Notăm $AN = x$, $BP = y$ şi folosim proprietatea tangentelor duse dintr-un punct exterior la cerc.

Altfel: Remarcăm că în triunghiul dreptunghic NOP, OM este înălţime.

Altfel: Arătăm că triunghiurile AON şi BOP sînt asemenea.

VII.G.113. Punctele D şi E aparţin laturii BC dacă A este cel mai mare unghi al triunghiului ABC. (În caz contrar, cel puţin unul dintre ele este exterior segmentului BC).

Aplicăm cazul de asemănare U·U.

VII.G.114. Analizați separat cazurile în care triunghiul *ABC* este ascuțitunghic, obtuzunghic, dreptunghic.

VII.G.115. a) Arătați că triunghiul *FGD* are două unghiuri congruente

b) Arătați că *OG* este linie mijlocie în triunghiul *ABD*.

Aplicați teorema catetei în triunghiul dreptunghic *ACD*.

VII.G.116. Construim *A'* — punctul diametral opus lui *A*. *MO* este linie mijlocie în triunghiul *ABA'*...

Altfel : Construim razele *OA, OB, OC, OD* și perpendiculara din *O* pe *CD*. Remarcăm triunghiuri congruente. Arătăm că $CD = 2OM$.

Altfel : Construim triunghiuri asemenea ; folosim teorema lui Pitagora.

VII.G.117. Remarcați triunghiuri asemenea în figură. Dacă nu le observați, încercați o altă soluție, folosind teorema lui Pitagora generalizată. Dacă ați rezolvat problema, încercați o generalizare a ei.

VII.G.118. Triunghiul *ABC* este isoscel.

VII.G.119. a) În privința unghiurilor, singura informație pe care o obținem este că $\sphericalangle EAN \equiv \sphericalangle EDC$. Căutăm să formăm o proporție cu lungimile laturilor acestor unghiuri în triunghiurile *AEN* și *DEC*. Găsim această proporție, fie observînd alte triunghiuri asemenea, fie folosind relații metrice în triunghiuri dreptunghice.

CLASA A VIII-A

CLASA A VIII-A

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I

INECUAȚII

VIII.A.1. Se dau mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, \ -3 < x < 6\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbf{R}, \ -5 \leqslant x < 2\}$.

a) Scrieți cu ajutorul intervalelor mulțimile: A; B; $A \setminus B$.

b) Precizați, enumerînd, elementele mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbf{N}$, unde $\mathbf{N}$ este mulțimea numerelor naturale.

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VIII.A.2. Fie $E(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$. Să se afle valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $E(x) \leqslant 0$ și $E(x) \in \mathbf{Z}$.

(Etapa locală, 1986, Covasna)

VIII.A.3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+7}{3x-4} > 0; \\ \dfrac{3x-4}{2x-6} < 0. \end{cases}$$

(Etapa locală, 1985, Suceava)

VIII.A.4. Fie A și B mulțimile de numere reale pentru care fracțiile $\dfrac{x+1}{2x+1}$ și $\dfrac{2-x}{2+x}$ sînt pozitive. Să se calculeze $A \cup B$ și $A \cap B$.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VIII.A.5.

a) Să se rezolve: $\dfrac{2x-9}{-1-x} \geqslant 0$; $(7x-21)(x+2) < 0$.

b) Notînd cu $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \dfrac{2x-9}{-1-x} \geqslant 0\right\}$ și $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (7x-21)(x+2) < 0\}$, aflați $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap \mathbf{Z}$, $A \cap \mathbf{N}$.

c) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
$3 \in A$; $[1, 2] \subset A \cap XB$; $2{,}5(39) \in B \setminus A$; perechea $(2, 2) \in AXB$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VIII.A.6.

a) Să se rezolve în **N** sistemul de inecuații :

$$\begin{cases} \frac{n+2}{8n+7} - \frac{1}{8} < \frac{1}{1\,000}; \\ \frac{n+2}{8n+7} - \frac{1}{8} > \frac{-1}{1\,000}. \end{cases}$$

b) Se consideră expresia $E(n) = \frac{n+2}{8n+7}$, unde $n \in \mathbf{N}$. Să se calculeze valoarea expresiei $E(n)$, pentru $n = 1986^5$, cu două zecimale exacte.

(Etapa județeană, 1985, Bacău)

CAPITOLUL II

FUNCȚII

VIII.A.7. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = (-2m+1)(m-3)x + 3 - m$. Reprezentați grafic această funcție dacă :

a) $m = 3$;

b) $m = 0$;

c) $m = 2$;

d) $m = \frac{1}{2}$.

(Etapa județeană, 1985, Vaslui)

VIII.A.8. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dacă } x \geqslant 2 \\ -x + 2 \text{ dacă } x < 2 \end{cases}$$

(Etapa locală, 1984, Alba)

VIII.A.9. Se consideră funcțiile : $f : [1, 7] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g : [-10, 2] \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x + 3$.

a) Cercetați dacă punctul $A(1, 2)$ aparține graficului funcției f (graficului funcției g).

b) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$.

(Etapa locală, 1985, Gorj)

VIII.A.10. Într-un sistem de axe perpendiculare xOy se consideră punctele $A(0, 3)$, $B(3, 0)$, $C(6, 3)$:

a) Determinaţi funcţia a cărei reprezentare grafică este reuniunea segmentelor AB şi BC.

b) Calculaţi măsurile laturilor triunghiului ABC, precum şi aria triunghiului ABC.

(Etapa locală, 1985, Alba)

VIII.A.11. Fie f şi g două funcţii liniare.

a) Determinaţi funcţiile, ştiind că : $2f(x+1)+g(x-1) \equiv 2x+14$ şi $f(x+1)-2g(x-1)=6x-18$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Reprezentaţi grafic funcţiile f şi g, apoi aflaţi coordonatele punctului de intersecţie a celor două grafice.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

VIII.A.12. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin :

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ dacă } x \in (-\infty, 1] \\ -2x+m \text{ dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

a) Să se determine m astfel încît graficul funcţiei să treacă prin punctul $M(4, -5)$.

b) Să se reprezinte grafic funcţia f.

c) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $f(x) \leqslant 0$, cu m determinat la punctul a).

(Etapa locală, 1986, Alba)

VIII.A.13. Se consideră funcţiile :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x)=\sqrt{3}x+1$$

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x)=-\sqrt{3}x+1$$

a) Să se găsească coordonatele punctului de intersecţie al graficelor celor două funcţii.

b) Să se demonstreze că graficul celor două funcţii determină un unghi cu măsura de 60°.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

VIII.A.14. Fie funcţia liniară $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=ax+b$, $a \neq 0$ şi $x_1 \neq x_2 \in \mathbf{R}$. Arătaţi că :

a) $f(x_1) \neq f(x_2)$;

b) $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$;

c) $f(x-1)+2f(x+2)=3f(x+1)$.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

VIII.A.15. Ştiind că $f(x-1)=3x-8-f(1)$, să se stabilească prin care din punctele $A(0,-4)$; $B(5, 1)$; $C(3, 2)$; $D(10, 26)$ trece graficul funcţiei $y=f(x)$, unde $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

(Etapa locală, 1986, Bihor, Galaţi)

VIII.A.16. Să se determine funcţia de gradul I, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ştiind că $f(x-1)=-3x-5-f(2)$.

(Etapa judeţeană, 1986, Arad)

VIII.A.17. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x-4)=ax$, $a\in\mathbf{R}$.

a) Aflaţi $f(x)$.

b) Dacă $f(x)=ax+4a$, determinaţi a, ştiind că punctul $P\left(1,\frac{a-9}{2}\right)$ aparţine graficului funcţiei f.

c) Pentru $f(x)=-x-4$, rezolvaţi inecuaţia $f(x)/2-f(x)\geqslant 1$.

(Etapa locală, 1986, Iaşi)

VIII.A.18. Se dă funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-kx+2$, $k\in\mathbf{Z}\setminus\{1\}$. Aflaţi valorile lui k astfel încît graficul funcţiei f să treacă prin punctul de intersecţie al dreptelor date de ecuaţiile : $x+y=1$ şi $x+ky=3$.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

VIII.A.19. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2ax-2 & \text{pentru } x\leqslant 1\\ -2x+b & \text{pentru } x>1\end{cases}$ $a, b\in\mathbf{R}$

a) Determinaţi $f(2)$, ştiind că punctele $A(1, 0)$ şi $B(2, 0)$ aparţin graficului.

b) Pentru $a=1$ şi $b=4$ reprezentaţi grafic funcţia.

c) Există valori ale lui a şi b astfel încît f să fie negativă sau zero, oricare ar fi x real ? Dacă da, găsiţi două asemenea valori, atît pentru a, cît şi pentru b.

(Etapa judeţeană, 1986, Botoşani)

VIII.A.20. Definind $max(a,b)=\begin{cases}a & \text{dacă } a\geqslant b\\ b & \text{dacă } a<b,\end{cases}$

reprezentaţi grafic funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=max(x-2,\ 1-x)$.

(Etapa judeţeană, 1986, Mureş)

VIII.A.21. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{dacă } x\leqslant 0\\ 0 & \text{dacă } 0<x<2\\ x-2 & \text{dacă } x\geqslant 2\end{cases}$$

a) Reprezentaţi grafic funcţia f.

b) Calculaţi valoarea expresiei $f(-2)+f(1)\cdot f(14)-2f(-1/2):f(5/2)$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VIII.A.22. Fie funcţia $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dată de $f(x) = 3x^2 - 1$ şi $f(x_1)$, $f(x_2)$ şi $f(x_3)$, trei valori arbitrare ale funcţiei f. Să se arate că printre cele trei valori există întotdeauna două a căror diferenţă este divizibilă cu 12.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VIII.A.23. Se consideră punctele $A(1, 1)$; $B(2, 2)$ şi $C(3, 1)$. Determinaţi funcţia a cărei reprezentare grafică este reuniunea segmentelor AB şi BC.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

CAPITOLUL III

POLINOAME. FRACŢII RAŢIONALE

VIII.A.24. Aflaţi valorile polinoamelor :

a) $P(X) = X^{10} - 2X^9 + X^8 - 2X^7 + \ldots + X^2 - 2X + 1$, pentru $x = 2$.

b) $Q(X) = X^{17} - 12X^{16} + 12X^{15} - 12X^{14} + \ldots - 12X^2 + 12X - 1$, pentru $x = 11$.

(Etapa judeţeană, 1986, Galaţi)

VIII.A.25. Calculaţi : $E(x) = x^3 + (a + 1)x^2 + (a + b)x + b + 1$, ştiind că $x^2 + ax + b = 0$.

(Etapa locală, 1983, Bucureşti, Gorj)

VIII.A.26. Arătaţi că dacă $x + y = 2$, atunci $x^2 + y^2 \geqslant 2$ şi $x^3 + y^3 \geqslant 2$.

(Etapa locală, 1985, Gorj)

VIII.A.27. Să se calculeze :

a) $(175x^3 - 1)(175x^3 + 3) - (175x^3 - 1)^2$.

b) $(x - y)^{17} + (y - x^{17} + (a - b)^2 - (b - a)^2$.

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VIII. A.28. 1. Scrieţi numerele 13 şi 31 ca diferenţe de pătrate de numere naturale. Generalizaţi pentru orice număr impar.

2. Calculaţi suma $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 1985$.

(Etapa judeţeană 1986, Călăraşi)

VIII.A.29. Se consideră polinomul :

$$E(X, Y, Z) = X^3 + X^2Y - 2X^2Z - 2XYZ + 2XZ + 2YZ - X - Y.$$

a) Să se descompună într-un produs de polinoame de gradul întîi în X, Y, Z.

b) Să se calculeze : $E(1, 1, 1)$; $E(1, 2, 2)$; $E(1, 3, 3)$; ... ; $E(1, 1986)$.

(Etapa locală, 1986, Botoşani)

VIII.A.30. Descompuneți în factori de gradul întîi :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(X + Y)(X + Z)(Y + Z).$$

(Etapa județeană, 1983, București)

VIII.A.31. Se consideră polinomul :

$$R(X, Y, Z) = X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2Y^2Z^2 - 2X^2Z^2.$$

a) Să se descompună în factori ireductibili.

b) Să se afle valoarea numerică a polinomului, știind că : $x + y + z = -9$, $xy + yz + xz = -\frac{4}{9}$ și $xyz = 4$.

(Etapa județeană, 1983, Botoșani)

VIII.A.32. Fie polinomul : $P(X) = X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X$.

a) Descompuneți $P(X)$ în factori ireductibili.

b) Arătați că pentru orice a întreg, numărul $P(a)$ este divizibil cu 24.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VIII.A.33. Se dau polinoamele : $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$ și $Q(X) = X^3 + X^2 - 4X + a$, unde $a \in \mathbf{R}$.

Să se determine valorile lui a astfel încît c.m.m.m.c. al acestor polinoame să fie egal cu produsul lor.

(Etapa județeană, 1985, Cluj)

VIII.A.34. Să se arate că $2^{2n} + 4^{2n} \geqslant 2^{3n+1}$, oricare ar fi n natural.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VIII.A.35. Demonstrați că triunghiul ale cărui laturi satisfac relația : $bc(c - b) + ca(a - c) + ab(b - a) = 0$, este isoscel.

(Etapa locală, 1984, Hunedoara)

VIII.A.36. Dacă $\frac{a-b}{c} + \frac{c-a}{b} + \frac{b-c}{a} = 0$,

este posibil ca $a = b$? Dar $b = c$?

(Etapa municipală, 1983, București)

VIII.A.37. Arătați că $x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

(Etapa locală, 1984, Alba)

VIII.A.38. Stabiliți dacă numărul $a = (y - 25)^2$ este divizibil cu 64, oricare ar fi y număr natural impar.

(Etapa municipală, 1986, București)

VIII.A.39. Se dă : $E(a, b) = 1000a^3 + 100a^2(3b + 1) + 10ab(3b + 2) + b^2(b + 1)$.

a) Să se arate că $E(a, b)$ se poate scrie ca suma dintre cubul unui număr și pătratul aceluiași număr.

b) Să se determine perechile de cifre (a, b) astfel încît $E(a, b)$ să fie pătrat perfect.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VIII.A.40. a) Stabiliţi ultimele două cifre ale numărului : $x = 47^3 + 48^3 + 49^3 + \ldots + 52^3 + 53^3$.

b) Se dă polinomul : $P(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 9X + 3$. Aflaţi $P(a)$, ştiind că $a^2 - 3a + 1 = 0$.

(Etapa municipală, 1986, Bucureşti)

VIII.A.41. Dacă x este impar, $E(x) = x^{12} - x^8 - x^4 + 1$ este multiplu de 512.

(Etapa judeţeană, 1985, Brăila)

VIII.A.42. Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$ şi $a + b$ se divide cu 7, atunci şi numărul $E = a^3 + 4a^2b + 3ab^2 + ab + b^2 - b - a$ se divide cu 7.

(Etapa judeţeană, 1985, Olt)

VIII.A.43. Să se arate că : $P = (2x^2 - x + 3)^2 (2x^2 - x + 9) + 24x^2 - 12x + 44$ este un cub perfect şi că pentru orice x real, este un număr real pozitiv.

(Etapa judeţeană, 1985, Suceava)

VIII.A.44. Să se arate că polinomul : $P(X) = 2(X + 1)^{n+1} + (-1)^{n+1} \cdot X^n$, $n \in \mathbf{N}$, se divide cu $2X + 1$.

(Etapa locală, 1984, Hunedoara)

VIII.A.45. Demonstraţi că polinomul : $P(X) = X^{n+1} - n(X - 1) - X$ se divide cu $(X - 1)^2$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

VIII.A.46. Se consideră polinoamele : $P(X) = X^8 - X^5 - X^3 + 1$ şi $Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se arate că polinomul $Q(X)$ divide polinomul $P(X)$.

b) Să se arate că $P^n(x) \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}^*$.

(Etapa judeţeană, 1986, Bihor)

VIII.A.47. Fie polinomul : $P(X) = (X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1)^2 - X^{2n}$ şi $Q(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$.

a) Să se arate că pentru $n = 2$, $P(X)$ este divizibil cu $Q(X)$.

b) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, $P(X)$ este divizibil cu $Q(X)$.

(Etapa judeţeană, 1986, Covasna)

VIII.A.48. Fie polinomul $P(X) = X^2 - 4X + 5$. Să se arate că polinomul $Q(X) = P(P(X)) - X$ se divide cu polinomul $R(X) = X^2 - 3X + 2$.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VIII.A.49. Fie polinoamele :

$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ şi

$Q(X) = b_0X^m + b_1X^{m-1} + \ldots + b_m$.

Ştiind că suma coeficienţilor lui $Q(X)$ este zero, calculaţi suma coeficienţilor polinomului $P(Q^2(X))$.

(Etapa judeţeană, 1985, Brăila)

VIII.A.50. Un polinom $P(X)$ de grad $\geqslant 2$, împărţit prin binomul $X - 1$, dă cîtul $Q(X)$ şi restul r, iar împărţit prin binomul $X - 2$, dă cîtul $Q'(X)$ şi restul tot r.

a) Care este suma coeficienţilor polinoamelor $P(X)$ şi $Q'(X)$?

b) Demonstraţi că polinomul $Q(X)$ este divizibil cu binomul $X - 2$.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VIII.A.51. Se dă polinomul $P(X) = X^2 - 2(m-1)X + (m-1)^2 + p$:

a) Să se determine m şi p astfel încît $P(X)$ să fie divizibil cu binomul $X - m$, iar suma coeficienţilor să fie $+1$.

b) Pentru valorile lui m şi p determinate la punctul a) stabiliţi care din afirmaţiile :

$P(x) < -1$;

$P(x) \geqslant -1$ este adevărată, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Brăila)

VIII.A.52. Să se afle $a, b \in \mathbf{Z}$ astfel încît suma coeficienţilor polinomului $P(X) = a(1-b)(3X^2-4)^{k+1} - b(1-2X)^k - a(2X-3X^3)^{k+2} + 1$ să fie zero pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Alba)

VIII.A.53. Dacă polinomul $X^4 + 4aX^3 + 6bX^2 + 4cX + d$ este divizibil cu polinomul $X^3 + 3aX^2 + 3bX + c$, arătaţi că primul este puterea a patra, iar al doilea cubul unui binom.

(Etapa locală, 1986, Bihor)

VIII.A.54. Fie $P(X)$ un polinom de grad cel puţin 2, cu coeficienţii reali, care îndeplineşte simultan condiţiile :

a) $P(X)$ împărţit la $X - 1$ dă restul 3 ;

b) $P(X) + X \cdot P(6 - X) = 4$.

Se cere restul împărţirii lui $P(X)$ la $X^2 - 4X + 3$.

(Etapa judeţeană, 1986, Caraş-Severin)

VIII.A.55. Împărţind polinomul $2X^3 - mX^2 + nX - 16$ la $X - 3$ şi $X + 1$, obţinem, în ambele cazuri, restul -2. Ce rest se obţine dacă se împarte la $X - 1$?

(Etapa locală, 1986, Maramureş)

VIII.A.56. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienţii reali, de grad cel puţin 2, care îndeplineşte simultan condiţiile :

a) $P(X)$ împărţit la $X - 1$ dă rest 3 ;

b) $(X - 1) \cdot P(X) + X \cdot P(X + 2) = 1$.

Se cere restul împărţirii lui $P(X)$ prin $X^2 - 4X + 3$.

(Etapa locală, 1985, Alba ; etapa judeţeană, 1986, Călăraşi)

VIII.A.57. Se dă polinomul : $P(X) = X^4 - 1986X^3 + 1987X^2 - 1988X + 1986$.

a) Să se arate că restul împărţirii polinomului $P(X)$ la $X - 1985$ este 1984^2.

b) Să se determine $\alpha \in \mathbf{N}$ încît restul împărţirii polinomului $P(X) + \alpha$ la $X - 1985$ să fie egal cu 1986^2.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

VIII.A.58. Ştiind că resturile împărţirilor polinomului $P(X)$ prin $X + 2$ şi $X - 1$ sînt 53 şi, respectiv, 2, să se afle restul împărţirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X) = X^2 + X - 2$.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

VIII.A.59. Prin împărţirea cu acelaşi polinom, $S(X)$, polinoamele $P(X) = X^3 - 5X^2 + 13X + 20$ şi $Q(X) = X^3 - 4X^2 + 12X - 14$ dau resturile $2X - 5$, respectiv $3X - 4$.

Să se determine polinomul $S(X)$.

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VIII.A.60. Să se calculeze cîtul împărţirii polinomului $P(X)$, de grad cel puţin 2, prin polinomul $X^2 + 2X - 15$, ştiind că resturile împărţirii aceluiaşi polinom $P(X)$ prin $X - 3$, respectiv $X + 5$, sînt 5, respectiv -11.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

VIII.A.61. Dacă polinomul $P(X)$, împărţit la $X^2 - 5$, dă cîtul identic cu restul şi $P(k) + P(-k) = 4k^2 - 16$ pentru orice $k \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, să se găsească termenul liber al lui $P(X)$.

(Etapa locală, 1986, Constanţa)

VIII.A.62. Se dă polinomul $P(X) = mX^{11} + (1 - m)X^2 + X + 1$, cu $m \in \mathbf{Z}$.

a) Să se determine restul împărţirii polinomului $P(X)$ la trinomul $X^2 + X + 1$.

b) Să se arate că $P(3)$ este divizibil cu 13, oricare ar fi $m \in \mathbf{Z}$.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VIII.A.63. Fie $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Să se calculeze restul împărţirii lui $P(X^5)$ prin $P(X)$.

(Etapa locală, 1986, Botoşani)

VIII.A.64. Să se determine un polinom de gradul trei divizibil cu $X^2 + X - 2$ şi care, împărţit la $X^2 + 2X - 8$, să dea restul $22X - 12$.

(Etapa locală, 1986, Maramureş)

VIII.A.65. Să se calculeze cîtul în împărţirea : $(X^k - 1) / (X - 1)$; $k \geqslant 2$; $k \in \mathbf{N}$.

a) Să se demonstreze că polinomul :

$P(X) = (X^k + X^{k-1} + X^{k-2} + \ldots + X + 1)^3 - X^{2k}$ este divizibil cu polinomul $Q(X) = (X^{k-1} + X^{k-2} + \ldots + X + 1)$, oricare ar fi $k \geqslant 2$, $k \in \mathbf{N}$.

b) Pentru care valori naturale ale lui $k \geqslant 2$ avem $P(1) - P(-1)$ cub perfect ?

(Etapa judeţeană, 1986, Brăila)

VIII.A.66.

a) Dat polinomul $P(X) = X^2 - 1$, să se calculeze $P(P(X))$

b) Dacă $Q(X)$ este un polinom de gradul I, să se calculeze gradul polinomului $R(X) = Q(Q(Q\ .\ \ .\ Q(X)\ \ .\ .)$, unde Q se repetă de 1986 de ori.

c) Să se determine $R(Q)$ în cazul particular $Q(X) = X + 1$.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VIII.A.67. Se dă $P_{m,\,n}(X) = (mX + n)^2 - (nX + m)^2$, unde $m, n \in \mathbf{Z}$.

a) Să se descompună în factori polinomul $P_{m,\,n}(X)$.

b) Dacă $m - n = x$, $P(x)$ 6, pentru orice $x \in \mathbf{Z}$.

c) Dacă $m - n$, $x + 1$, $m + n$ sînt trei numere întregi consecutive, atunci $P(x)$ se divide cu 24, pentru orice $x \in \mathbf{Z}$.

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VIII.A.68. a) Dacă $X - a$ divide polinomul $P(X) = X^2 - 5X + 6$, să se determine toate binoamele $X - b$ care divid polinomul $D(X) = P(X) - Q(X)$, unde $Q(X)$ este cîtul dintre $P(X)$ și $X - a$.

b) Fie o funcție f $\{0, 1, 2,\ \ \ \ 1986\} \to \{-1, 0, 1\}$. Calculați cea mai mică și cea mai mare valoare a sumei

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(1986).$$

Dacă $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \quad \cdot f(1986) \neq 0$, suma de mai sus poate lua valoarea zero ? Justificați.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VIII.A.69. a) Se dă polinomul $P(X, Y) = X^4 - Y^4 - 2X^3Y + 2XY^3 - X^2 + X^2$. Arătați că, oricare ar fi $x \in \mathbf{Q}$, nu există $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ astfel ca $P(x, y) = 0$.

b) Să se arate că polinomul $P(X) = (X + 1)(X + 2)\ .\ \ (X + 1985) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad 1985$ nu este ireductibil.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VIII.A.70. a) Să se arate că, pentru orice număr natural n, numărul $(n^3 + 3n^2 + n)(n^3 + 3n^2 + n + 2) + 1$ este pătrat perfect.

b) Se consideră funcțiile

$f : (1, 7) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g : [-10, 2] \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x - 3$.

Cercetați dacă punctul $A(1, 2)$ aparține unuia dintre graficele funcțiilor f sau g și apoi determinați valorile reale ale lui x pentru care :

$$\frac{g(x)}{f(x)} \geqslant 0.$$

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VIII.A.71. Să se arate că fracția :

$$F = \frac{3^{n+1}\cdot 5^n + 3^n\cdot 5^{n+2} + 6\cdot 3^n\cdot 5^n}{2^{2n+1}\cdot 3^n + 3^{n+1}\cdot 4^n + 2^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$$

se simplifică cu 17, oricare ar fi n număr natural.

(Etapa locală, 1985, Gorj)

VIII.A.72. Să se arate că fracția : $\frac{n^3 - 3n^2 - 2n + 6}{n^3 + 3n^2 + 2n + 6}$ este reductibilă, oricare ar fi numărul natural n.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VIII.A.73. Fie fracția algebrică rațională : $F(X) = \frac{2X^2 + 16X - 18}{X^2 + 5X - 6}$;

a) Să se aducă $F(X)$ la forma cea mai simplă.

b) Să se determine valorile $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $F(x) \in \mathbf{Z}$.

(Etapa locală, 1986, Mureș)

VIII.A.74. Fie fracția :

$$F(X) = \frac{X^3 - 10X^2 - X + 10}{X^2 - 9X - 10}$$

a) Simplificați fracția.

b) Arătați că $(\forall)x \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 10\}$, dacă x este par, $F(x)$ este impar.

(Etapa județeană, 1985, Neamț)

VIII.A.75. Se dă :

$$F(X) = \frac{X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 7X - 10}{X^2 + 4X - 5}.$$

a) Să se simplifice $F(X)$.

b) Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbf{Z} \setminus \{-5 ; 1\}$, $F(x)$ este un număr întreg, par.

(Etapa județeană, 1983, Alba)

VIII.A.76. Se consideră :

$$E(x) = \left(\frac{x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} - \frac{2 + x - x^3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}\right) : \frac{6\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)}{x + 4 + \frac{4}{x}}$$

a) Să se scrie mulțimea valorilor lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care expresia nu are sens ;

b) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă ;

c) Să se afle valorile întregi ale lui x pentru care expresia E are valori numerice întregi.

(Etapa județeană, 1986, Arad)

VIII.A.77. a) Să se arate că, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}_+$ şi $b \in \mathbf{R}_+$, propoziţia

$$\frac{2a^4b + 6a^3\sqrt{b^3} + 6a^2b^2 + 2a\sqrt{b^5}}{(a+\sqrt{b})\cdot(a+b)!} > \sqrt{a\cdot b}$$

este adevărată.

b) Ştiind că $f(x+2) = 3x - 5 - f(1)$, să se stabilească prin care din punctele $A(0, 1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 5)$ trece graficul acestei funcţii liniare.

(Etapa judeţeană, 1986, Botoşani)

VIII.A.78. Fie fracţia raţională:

$$F(X) = \frac{(X^4 + m^2X^3 + (m+1)X^2 + (4m+1)X - 3)}{(X^2 - 1)}.$$

a) Determinaţi valorile reale ale parametrului m, astfel încît fracţia să se simplifice prin $X - 1$.

b) Demonstraţi că oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, $F(x)$ nu se poate simplifica prin $x^2 - 1$.

(Etapa judeţeană, 1985, Vrancea)

VIII.A.79. Se consideră fracţia:

$$F(X) = \frac{X^4 - 6X^3 + nX^2 + mX - 8}{X^3 - 6X + pX - 6}.$$

a) Să se determine m, n şi p astfel încît $F(X)$ să se simplifice prin $X^2 - 3X + 2$.

b) Luînd în considerare forma simplificată de la punctul precedent, să se determine mulţimea:

$$A = \left\{ x \mid x \in \mathbf{Z}, \frac{1}{x-4} \cdot F(x) \in \mathbf{Z} \right\}$$

(Etapa judeţeană, 1986, Harghita)

VIII.A.80. Se consideră expresia:

$$E(x) = \frac{\frac{1}{x^2-1} + \left(1 + \frac{x-1}{2}\right) : \left(\frac{x+1}{2} - 1\right)}{x^2 + 2x + 2},$$

unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

a) Să se aducă la forma cea mai simplă şi să se găsească valorile reale ale lui x pentru care $E(x) > 0$.

b) Precizaţi funcţia $g(x)$ asociată expresiei date.

c) Reprezentaţi grafic funcţia definită de legea:

$$f(x) = \begin{cases} (x^3 + 2x^2 - x - 2)\cdot g(x), & \text{pentru } x \in [+3, +\infty) \\ 2x^2, & \text{pentru } x \in (-\infty, +3) \end{cases}$$

(Etapa judeţeană, 1986, Buzău)

VIII.A.81. a) Să se descompună în factori polinomul: $P(X) = X^3 - 8X^2 + 19X - 12$.

b) Utilizînd descompunerea de la punctul anterior, să se determine mulţimea : $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ şi } P(x) = 0\}$.

c) Să se arate că $x^2 - 4x + 5 \geq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

d) Să se scrie expresia :

$$E(x) = \frac{3x^2 - 12x + 19}{x^2 - 4x + 5} \text{ sub forma } E(x) = m + \frac{n}{(x-2)^2 + p},$$

unde m, n, p sînt constante ce vor fi determinate.

e) Utilizînd scrierea lui $E(x)$ de la punctul precedent, să se arate că $E(x) \in [3, 7]$.

f) Să se determine elementele mulţimii :

$$B = \left\{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ şi } \frac{3x^2 - 12x + 19}{x^2 - 4x + 5} \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(Etapa judeţeană, 1986, Bistriţa-Năsăud)

CAPITOLUL IV

PROBLEME DIVERSE

VIII.A.82. Să se efectueze :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

(Etapa locală, 1985, Alba)

VIII.A.83. Fie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi $n \in \mathbf{N}$; să se determine perechile (k, n) pentru care numărul $p = 2\sqrt{3} - (-1)^{3k+1} \cdot \sqrt{3n+6} + 1986$ este natural.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VIII.A.84. Dacă $a = 2\sqrt{4-\sqrt{15}}$ şi $b = \sqrt{6-\sqrt{10}}$, să se determine semnul fiecărui număr. Calculaţi apoi pătratele a^2, b^2. Ce observaţi ?

(Etapa locală, 1985, Maramureş)

VIII.A.85. Să se arate că $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbf{Q}$, oricare ar fi a şi b numere naturale impare.

(Etapa judeţeană, 1985, Neamţ ; 1986, Bihor)

VIII.A.86. Determinaţi valorile lui $k \in \mathbf{Z}$ astfel încît $3k^2 + 2k - 3$ să fie divizibil cu $3k + 1$.

(Etapa judeţeană, 1986, Brăila)

VIII.A.87. Să se arate că $1981 \cdot 1982 \cdot 1983 \cdot 1984 + 1$ este pătrat perfect.

(Etapa locală, 1985, Alba)

VIII.A.88. Demonstraţi că $(\forall) n \in \mathbf{N}$, numărul $A = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ se divide cu 19.

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

VIII.A.89. Se consideră numărul: $p = 1985^n + 1984^n + x$, cu $n \in \mathbf{N}$, $x \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Să se determine x astfel ca numărul p să fie divizibil cu 5.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VIII.A.90. Să se demonstreze că: $A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ se divide cu 1897, dacă n este un număr natural oarecare.

(Etapa județeană, 1985, Gorj)

VIII.A.91. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ x \mid x \in \mathbf{N}, \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbf{Z} \right\}.$$

$$B = \left\{ x \mid x \in \mathbf{N}, \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbf{N} \right\}.$$

Să se determine $A \cup B$, $A \cap B$ și $A \setminus B$.

(Etapa județeană, 1986, Alba)

VIII.A.92. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația: $x^2y + x^2 - 180 = 0$.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

VIII.A.93. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\frac{9x-1}{x} - \frac{x+1}{1-x} : \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{1-x} = x.$$

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

VIII.A.94. Să se rezolve ecuația:

a) $\dfrac{5x^2 + mx - 3m}{x+1} = 5x - 1.$

b) Dacă $x = \dfrac{3m-1}{m-4}$, să se determine valorile întregi ale lui m pentru care $x \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VIII.A.95. Rezolvați ecuațiile:

a) $(m+1)x + n = x$ (m și n sînt parametri reali).

b) $\dfrac{4x^2-9}{2x^2-3x} - \dfrac{1-x}{x} - \dfrac{13}{3} = 0.$

(Etapa județeană, 1983, Botoșani)

VIII.A.96. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi și să se discute în funcție de $a \in \mathbf{Z}$ ecuația: $a^2x - a^3 = x - 1$.

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

VIII.A.97. Să se rezolve ecuația: $(x^2 + 2x + 1)^2 + (x^2 + 3x + 2)^2 + (x^2 + 4x + 3)^2 + \ldots + (x^2 + 1986x + 1985)^2 = 0$. Generalizare.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VIII.A.98. Găsiţi funcţia pătratică f, ştiind că : $f(1) = 0$, $f(-1) = -2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$.

(Etapa locală, 1986, Braşov)

VIII.A.99. Să se găsească $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde $f(x) = mx^2 + nx + p$ ($m \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}$), ştiind că punctele $A(a\ ;\ a(b+c))$, $B(b\ ;\ b(c+a))$, $C(c\ ;\ c(a+b))$ aparţin reprezentării grafice a funcţiei f şi că numerele a, b, c sînt numere reale distincte.

(Etapa municipială, 1983, Bucureşti)

VIII.A.100. Să se determine funcţia pătratică $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ştiind că $f(0) = 3$; $f(f(0) - 1) = 5$; $f(f(f(0) - 1)) = 23$.

(Etapa judeţeană, 1985, Suceava)

VIII.A.101.

a) Să se găsească polinoamele $P(X)$ şi $Q(X)$ de gradul 2, ştiind că $P(0) = 9$, $P(-1) = 25$, $P(1) = 1$, $Q(0) = -3$, $Q(-1) = 0$, $Q(1) = -2$.

b) Să se rezolve ecuaţia $\frac{1}{3} \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{2}$.

(Etapa judeţeană, 1983, Alba)

VIII.A.102. Să se determine coeficienţii polinomului: $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, ştiind că sînt îndeplinite simultan condiţiile :

(1) $P(X)$ este divizibil cu $X + 1$;

(2) $P_1(1) = 2$ şi $P_1(2) = -1$, unde $P_1(X)$ este cîtul împărţirii polinomului $P(X)$ cu $(X + 1)$.

(Etapa judeţeană, 1986, Braşov)

VIII.A.103. Fie $P(X)$ un polinom care satisface condiţiile : $\frac{P(0)}{1} = \frac{P(1)}{2} = \frac{P(2)}{3}$ şi $P(0) + P(1) + P(2) = 6$. Se cere :

a) Să se arate că gradul lui $P(X)$ nu poate fi 0 sau 2.

b) Să se arate că pentru orice polinom $P(X)$, care satisface condiţiile date, prin împărţirea la $X(X-1)(X-2)$ se obţine acelaşi rest.

(Etapa judeţeană, 1986, Dolj)

VIII.A.104.

a) Descompuneţi în factori : $(X + Y + Z)^3 - X^3 - Y^3 - Z^3$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi sistemul :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

(Etapa judeţeană, 1986, Bihor)

VIII.A.105. Să se afle numerele reale x, y, z care satisfac simultan egalităţile :

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$;

(2) $\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^2 x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2 y + z = 2.$

(Etapa judeţeană, 1986, Cluj)

VIII.A.106. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{(ay+bx)} = c ; \\ \dfrac{xz}{(az+cy)} = b ; \\ \dfrac{xy}{(bz+cy)} = a. \end{cases}$$

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VIII.A.107. Se dau numerele reale a, b, c, x, y, z nenule și diferite între ele, care satisfac relațiile : $bc = \dfrac{1}{(x-a)}$; $ac = \dfrac{1}{(y-c)}$; $ab = \dfrac{1}{(z-c)}$ și $2bcz + 3acy + 4abz = 18$. Să se calculeze produsele abc și xyz.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VIII.A.108. Suma a două numere naturale adunată cu produsul lor, cu diferența lor și cu cîtul lor, este 450. Să se afle numerele.

(Etapa județeană, 1985, Gorj ; etapa locală, Suceava)

VIII.A.109. Să se rezolve ecuația : $[(x^3+3x^2+2x+1)/3] + x = 23$, $x \in \mathbf{Z}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VIII.A.110. Fie numerele naturale a, b, c, d astfel încît $\{b, c, d\} \subset (-\infty, 1]$ și $\{a, ab, abc\} \subset [1, +\infty)$. Să se arate că $3 + abcd \leqslant a + b + c + d$.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

VIII.A.111. Să se arate că $a^{4n} + b^{4n} + c^{4n} \geqslant (abc)^n(a^n + b^n + c^n)$, pentru oricare a, b, c numere reale și $n \in \mathbf{N}$.

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VIII.A.112. Să se arate că dacă x, y, z sînt numere reale astfel încît $x + y + z = a$, atunci $(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a^2) \geqslant 4a^2 \setminus 3$.

(Etapa județeană, 1986, Bistrița-Năsăud)

VIII.A.113. Fie x, y, z trei numere reale pozitive și nenule. Arătați că $xy + xz = 2yz$, $yz + xz = 2xz$ și $xz + yz = 2xy$ dacă și numai dacă $x = y = z$.

INDICAȚII

VIII.A.2. $E(x) = 1 + \dfrac{7}{x-4}$.

VIII.A.3. Observăm că $x^2 > 0$, deci $(x^2+7) \geqslant 7 > 0$ pentru oricare $x \in \mathbf{R}$.

VIII.A.4. Elementele lui A se găsesc rezolvînd inecuaţia $\frac{2-x}{2+x} > 0$, iar ale lui B rezolvînd inecuaţia $\frac{x+1}{2x+1} > 0$.

VIII.A.5.

a) $(2x-9) \geqslant 0$ şi $(-1-x) > 0$ sau $(2x-9) \leqslant 0$ şi $(-1-x) \leqslant 0$

Apoi : $(7x-21) > 0$ şi $(x+2) < 0$ sau $(7x-21) < 0$ şi $(x+2) < 0$.

VIII.A.6. b) Folosiţi punctul a) : $-1/1\,000 < E(n) - 1/8 < 1/1\,000$.

VIII.A.7. a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = -3x + 3$; d) $f(x) = \frac{5}{2}$.

VIII.A.8. Pe intervalele $(-\infty ; 2)$ şi $(2 ; +\infty)$ funcţia este liniară ; observăm că $f(2)$ este acelaşi cînd este determinat cu fiecare din cele două valori.

VIII.A.9. a) Calculaţi $f(1)$ şi $g(1)$.

VIII.A.10. Se caută, de exemplu, $f(x) = ax + b$ pe $[0, 3)$ şi pe $[3, 6]$.

VIII.A.11. a) Rezolvaţi sistemul cu necunoscutele $f(x+1)$ şi $g(x-1)$.

VIII.A.12. a) Calculaţi $f(4) = -5$.

VIII.A.13. a) Se va rezolva sistemul : $\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 1 \\ y = -\sqrt{3}x + 1 \end{cases}$

VIII.A.14. a) Calculaţi $f(x_1) - f(x_2)$, ştiind că $x_1 - x_2 \neq 0$.

VIII.A.15. Se poate calcula $f(1)$ pentru $x = 2$.

VIII.A.16. Calculăm $f(2)$ pentru $x = 3$.

VIII.A.17.

a) $f(x-4) = a(x-4) + 4a$.

b) Avem $f(1) = \frac{(a-9)}{2}$.

VIII.A.18. Coordonatele lui A se găsesc rezolvînd sistemul :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + ky = 3 \end{cases}$$

VIII.A.19. a) Rezolvăm sistemul :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

VIII.A.20. Se explicitează funcţia dată.

VIII.A.22. Pentru x_1, x_2, x_3 întregi, două din ele sînt de aceeaşi paritate.

VIII.A.23. $f(x) = ax + b$. Formăm un sistem.

VIII.A.24. După ce înlocuiţi, asociaţi convenabil.

VIII.A.25. Asociați convenabil și descompuneți, pentru a apare : $X^2 + aX + b$.

VIII.A.26. Folosiți $xy = \frac{[(x+y)^2 - (x-y)^2]}{4}$.

VIII.A.27. Folosiți factorul comun.

VIII.A.28. Scriem $13 = (x+y)(x-y)$ și formăm un sistem.

VIII.A.29. $x + y$ este unul din factori.

VIII.A.30. Se grupează $(x^3 + y^2) + 3(x + y)(x + z)(y + z) + z^3$ pentru a se ajunge la cubul unei sume.

VIII.A.31. a) Asociați convenabil pentru a obține o diferență de două pătrate.

VIII.A.32. Dați factor comun pe x, asociați astfel încît să aveți $x + 2$ factor comun.

VIII.A.33. Polinoamele trebuie să fie prime între ele.

VIII.A.34. Puneți în evidență un pătrat perfect.

VIII.A.35. Descompuneți în factori.

VIII.A.36. Descompuneți în factori.

VIII.A.37. Asociați în două pătrate.

VIII.A.38. Notați : $y = 2n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

VIII.A.39.

a) Desfaceți parantezele și apoi asociați convenabil.
b) Folosiți scrierea de la punctul a).

VIII.A.40. a) Asociați convenabil în sume de cuburi.

VIII.A.41. Descompuneți $E(x)$ convenabil în produs.

VIII.A.42. Scrieți numărul E cu factorul $a + b$.

VIII.A.43. Este cubul lui $(2X^2 - X + 3) + 2$.

VIII.A.44. Trebuie ca $P(-1/2) = 0$.

VIII.A.45. Scrieți $P(X) = (X - 1) \cdot Q(X)$ și apoi arătați că $Q(1) = 0$.

VIII.A.46.

a) Scriem $P(X) = A(X) \cdot Q(X)$.
b) Se continuă descompunerea și apoi, $x \in \mathbf{R}$.

VIII.A.47. Se scrie $P(X)$ cu ajutorul lui $Q(X)$ ca factor.

VIII.A.48. Scriem $P(X) = R(X) - (X - 3)$.

VIII.A.49. Suma coeficienților unui polinom $P(X)$ este $P(1)$.

VIII.A.50. Avem $P(X) = (X - 1)\,Q(X) + r$ și $P(X) = (X - 2)\,Q'(X) + r$.

VIII.A.51. $P(m) = 0$ și $P(1) = 1$.

VIII.A.52. $P(1) = 0$, k par și k impar.

VIII.A.53. Restul împărțirii celor două polinoame este polinomul nul, deci toți coeficienții lui sînt zero.

VIII.A.54. $P(1) = 3$ şi $P(3) + 3P(3) = 4$.

VIII.A.55. $P(3) = -2$ şi $P(-1) = -2$.

VIII.A.56. $P(1) = 3$ şi $Q \cdot P(1) + 1 \cdot P(3) = 1$.

VIII.A.57. a) Calculăm $P(1985)$; b) $P(1985 + \alpha) = 1986$.

VIII.A.58. $P(-2) = 53$, $P(1) = 2$, $P(X) = Q(X) \cdot C(X) + mX + n$.

VIII.A.59. Aplicaţi teorema împărţirii cu rest.

VIII.A.60. $P(3) = 5$, $P(-5) = -11$ şi teorema împărţirii cu rest.

VIII.A.61. Din teorema împărţirii cu rest, este de forma $aX + b$.

VIII.A.62. a) Descompuneţi polinomul şi constataţi că $r = 0$.

VIII.A.63. $P(X^5) = P(X) \cdot Q(X) + 1$.

VIII.A.64. $P(X) = (aX + b)(X^2 + X - 2)$.

VIII.A.65.

a) Prin împărţire observăm cum arată cîtul. Restul este zero.

b) Pentru comoditate, observăm că $P(X) = X \cdot Q(X) + 1)^3 + X^{2k}$.

VIII.A.66. b) $M(X)$ şi $N(X)$ polinoame de gradul I implică $M(N(X))$ polinom de gradul I.

VIII.A.67. a) Descompunem $P_{m,n}(X)$ în produse de polinoame de gradul întîi.

VIII.A.68. a) Descompuneţi $P(X)$. b) $f(0) = \ldots = f(1986) = f(-1)$. Apoi $f(0) = \ldots = f(1986) = 1$.

VIII.A.69. a) Arătaţi că $P(X)$ e divizibil cu $X + 1986$. b) Descompunem $P(X, Y)$.

VIII.A.70. a) Notaţi $n^3 + 3n^2 + n$ cu y. b) Verificaţi dacă $f(1) = 2$, apoi $g(1) = 2$.

VIII.A.71. Folosiţi cunoştinţele despre puteri.

VIII.A.72. După descompuneri, considerăm $n = 2k$ şi $n = 2k + 1$.

VIII.A.73. a) Simplificaţi fracţia. b) $F(x) = 2 + \dfrac{6}{x + 6}$.

VIII.A.74. a) Se simplifică cu $(X - 10)(X + 1)$.

VIII.A.75. a) Descompuneţi numitorul şi împărţiţi, pe rînd, la factorii lui, sau împărţiţi direct.

VIII.A.76. a) Analizaţi numitorii.

VIII.A.77. a) Se pleacă de la inegalitatea mediilor $\sqrt{a \cdot b} \leq \dfrac{(a + b)}{2}$. b) Se constată că $f(1) = 2$. Se găseşte $f(x - 2) = 3x - 7$.

VIII.A.78. Aplicăm teorema lui Bézout.

VIII.A.79. Împărţiţi numărătorul şi numitorul cu $X^2 - 3X + 2$.

VIII.A.81. a) Căutăm divizorii de forma $X - a$, cu a divizor al lui 12.

VIII.A.82. Folosiți $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

VIII.A.83.

$2\sqrt{3}$ este număr irațional. Trebuie ca $(-1)^{3k+1}\sqrt{3n+6}=2\sqrt{3}$.

VIII.A.85. Folosim metoda reducerii la absurd.

VIII.A.86. Arătați că $(3k+1)\mid(3k^2+2k-3)-k(3k+1)$.

VIII.A.87. Notăm $1981=a$. Avem $a(a+1)(a+2)(a+3)+1. = \ldots$

VIII.A.89. Căutați ultima cifră a fiecăruia dintre numerele 1985^n și 1984^n.

VIII.A.90. Folosim formula $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+\ldots+y^{n-1})$.

VIII.A.91. a) $\frac{3x+2}{x-2}=3+\frac{8}{x+2}$ etc.

VIII.A.92. $y=\frac{180}{x^2}-1$.

VIII.A.93. Aduceți întîi la forma simplă.

VIII.A.94. Este reductibilă la ecuația de gradul I, dacă $x\neq-1$.

VIII.A.96. Aduceți ecuația la forma $mx=n$.

VIII.A.97. Cînd o sumă de pătrate este zero ?

VIII.A.98. Căutăm $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq0$.

VIII.A.99. Rezolvăm sistemul format din ecuațiile : $f(a)=a(b+c)$, $f(b)=b(c+a)$, $f(c)=c(a+b)$.

VIII.A.100. Căutăm $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq0$.

VIII.A.101. Rezolvați un sistem, pornind de la $P(X)=aX^2+bX+c$, $a\neq0$ și apoi, altul, pornind de la $Q(X)=mX^2+nX+p,\ m\neq0$.

VIII.A.102. $P(-1)=0,\ P(1)=2,\ P(2)=-1$.

VIII.A.103. a) Folosiți proprietatea șirului de rapoarte egale.

VIII.A.104.

a) Folosiți suma și diferența de cuburi.

b) Ajutați-vă de descompunerea precedentă.

VIII.A.105. Scrieți (1) ca o sumă de pătrate.

VIII.A.106. De exemplu, prima ecuație se scrie : $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{1}{c}$.

VIII.A.107. Combinați primele trei, pentru a obține o nouă relație care să fie folosită la ultima.

VIII.A.108. Formați o ecuație.

VIII.A.109. x^3+3x^2+2x+1 se mai scrie $x(x+1)(x+2)+1$.

VIII.A.111. Folosiți : $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yx$.

VIII.A.112. $x-a=y+z$ etc.

VIII.A.113. Demonstrați două implicații.

CLASA A VIII-A

GEOMETRIE

CAPITOLUL I

PARALELISM ÎN SPAŢIU

VIII.G.1. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în spaţiu paralelogramele $ABB'A'$, $BCC'B'$ şi $CAA''C''$. Se notează cu M, N, P, Q, R, S mijloacele segmentelor AB'', AC', BC'', BA'', CA' respectiv CB'. Să se arate că segmentele MN, PQ, RS pot fi laturile unui triunghi şi să se calculeze aria lui în funcţie de aria triunghiului ABC.

(Etapa judeţeană, 1985, Cluj)

VIII.G.2. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Notăm cu E şi cu F proiecţiile punctului A, respectiv pe bisectoarele unghiurilor ABD şi ACD. Să se arate că EF este paralelă cu planul (BCD).

(Etapa locală, 1984, Hunedoara ; etapa judeţeană, 1986, Caraş-Severin)

VIII.G.3. O dreaptă a conţinută în planul α este paralelă cu un alt plan β. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei : „Planul α este paralel cu planul β."

(Etapa locală, 1985, Argeş)

VIII.G.4. Prin vîrfurile paralelogramului $ABCD$ se duc patru drepte paralele între ele pe care se iau, de aceeaşi parte a planului (ABC), punctele A', B', C' astfel că $AA' = 3a$, $BB' = 4a$, $CC' = a$. Să se determine punctul în care planul $(A'B'C')$ taie paralela dusă prin D.

(Etapa judeţeană, 1986, Prahova)

VIII.G.5 Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Printr-un punct M de pe segmentul AB se duce un plan paralel cu AC şi BD. Acest plan intersectează pe BC în Q, pe CD în P şi pe AD în N.

a) Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) În cazul în care $AM = x$ cm, $AC = 12$ cm şi $BD = 7$ cm să se calculeze în funcţie de x perimetrul patrulaterului $MNPQ$..

(Etapa locală, 1985, Suceava)

CAPITOLUL II

DREAPTA PERPENDICULARĂ PE PLAN

VIII.G.6. Fie planul α şi paralelogramul $ABCD$ cu toate vîrfurile situate de aceeaşi parte a planului α. Dacă distanţele de la punctele A, B, C, D la planul sînt respectiv a, b, c, d să se arate că : $a + c = b + d$.

(Etapa judeţeană, 1986, Dîmboviţa)

VIII.G.7. Se dă un triunghi BCD în care $BD = 15$ cm şi $CD = 6$ cm. Pe segmentul BD se ia punctul A astfel încît $AC = AD = 5$ cm, iar pe perpendiculara în A pe planul triunghiului se ia punctul M astfel încît $AM = 3$ cm, bisectoarea unghiului BAC intersectează dreapta BC în E. Să se calculeze distanţele ME şi BC.

(Etapa judeţeană, 1985, Cluj)

VIII.G.8. Pe planul triunghiului echilateral ABC, de latura „a", se ridică în A şi B perpendicularele AM şi BN astfel ca $AM = 2BN$.

a) Ce fel de triunghi este CMN (justificaţi !)

b) Ce lungime trebuie să aibă BN astfel ca triunghiul CMN să fie dreptunghic ?

(Etapa judeţeană, 1986, Maramureş)

VIII.G.9. În vîrful D al pătratului $ABCD$ de latura „a" se duce perpendiculara $DE = 2a$ pe planul pătratului.

a) Dacă P este un punct mobil al segmentului BE, să se determine unghiul dintre OP şi AC unde $\{O\} = AC \cap BD$.

b) Să se precizeze poziţia punctului P astfel ca aria triunghiului ABC să fie :

1. de trei ori mai mare decît aria triunghiului APC ;

2. egală cu aria triunghiului APC.

În ce caz poziţia lui P conduce la aria minimă a triunghiului APC ?

(Etapa locală, 1985, Tulcea)

VIII.G.10. Pe planul unui triunghi echilateral ABC de latura „a" se ridică perpendicularele AA' şi BB'. Se ştie că $BB' = a$. Să se găsească AA' astfel încît :

a) triunghiul $A'B'C$ să fie dreptunghic $m(\widehat{B'}) = 90°$;

b) triunghiul $A'B'C$ să fie isoscel cu $A'B' \equiv A'C$.

(Etapa locală, 1985, Timiş)

VIII.G.11. Pe planul triunghiului dreptunghic BAC ($m(\widehat{A}) = 90°$), cu $AB = 3$ cm ; $AC = 4$ cm, se ridică în cele trei vîrfuri de aceeaşi parte a planului, trei perpndiculare, pe care se iau segmentele : $AA' = x$; $BB' = 1$ cm ; $CC' = y$.

a) Găsiţi o relaţie între x şi y astfel ca triunghiul $A'B'C'$ să fie dreptunghic în B'.

b) Determinaţi toate cazurile în care lungimile segmentelor x şi y sînt exprimate în numere naturale.

(Etapa locală, 1984, Giurgiu)

VIII.G.12. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\widehat{A}) = 90°$) şi α un plan care trece prin mijlocul M al ipotenuzei şi este perpendicular pe mediana AM. Să se demonstreze că oricare ar fi punctul $P \in$ avem :

$$PA^2 = \frac{1}{2}(PB^2 + PC^2).$$

(Etapa judeţeană, 1986, Harghita)

VIII.G.13. Fie planul α şi A un punct exterior planului.

a) Dacă distanţa de la punctul A la planul α este de 3 cm, să se găsească locul geometric al punctelor B şi C din planul α astfel încît triunghiul ABC să fie echilateral cu latura de 5 cm.

b) Dacă A' este piciorul perpendicularei duse din punctul A pe planul α, să se demonstreze că $m(\widehat{BA'C}) > 60°$.

(Etapa judeţeană, 1986, Botoşani)

VIII.G.14. Pe planul rombului $ABCD$ de latura a şi diagonală $AC = a\sqrt{3}$, se ridică perpendiculara $DV = a$. Să se afle distanţa de la V la latura BC.

(Etapa judeţeană, 1985, Maramureş)

VIII.G.15. Fie trapezul $ABCD$ ($AD \parallel BC$) de arie 56 cm² şi $AB = 7$ cm. În mijlocul M al laturii CD, pe planul trapezului, se ridică perpendiculara $MN = 6$ cm. Să se calculeze distanţa de la N la latura AB.

(Etapa judeţeană, 1986, Braşov)

VIII.G.16. Trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) are $AD = AB = a$ şi $m(\widehat{BAC}) = 30°$. În punctul O de intersecţie al diagonalelor se duce perpendiculara d pe planul trapezului. Fie $M \in d$ astfel ca $OM = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Calculaţi distanţa de la M la laturile trapezului.

(Etapa judeţeană, 1985, Teleorman)

VIII.G.17. Fie $ABCD$ un paralelogram cu laturile $AB = 10$ cm, $AD = 6$ cm şi diagonala $BD = 8$ cm. Fie P un punct pe diagonala AC astfel încît $AC = 4AP$. În punctul P se ridică perpendiculara PM pe planul paralelogramului astfel încît $PM = 5$ cm. Să se afle :

a) Lungimea diagonalei AC.

b) Distanţa de la punctul M la laturile AD şi BC şi la diagonalele paralelogramului.

(Etapa judeţeană, 1986, Tulcea)

VIII.G.18. Fie triunghiul echilateral ABC și O un punct în afara planului ABC astfel încît : $OA \equiv OB \equiv OC \equiv AB$.

a) Demonstrați că $OA \perp BC$, $OB \perp AC$, $OC \perp AB$.

b) Dacă M este mijlocul lui AB și N mijlocul lui OC, atunci $MN \perp AB$ și $MN \perp OC$.

(Etapa județeană, 1986, Călărași)

VIII.G.19. Pe latura OX a unghiului XOY, $(m\widehat{XOY}) = 60°)$ se ia punctul A astfel încît $OA = a$, din care se duce o perpendiculară pe OX și care intersectează pe OY în B. Din B se duce perpendiculara d pe planul unghiului dat și se ia pe ea $BM \equiv OA$. Fie BE perpendiculară pe AM $(E \in AM)$, AD perpendiculară pe OC $(C \in OB)$ și CD perpendiculară pe AM $(D \in AM)$.

a) Să se determine unghiurile triunghiului ABM și lungimea înălțimii BE.

b) Să se afle valoarea raportului $\frac{DE}{AD}$

c) Să se calculeze perimetrul triunghiului OAM.

d) Ce poziție are dreapta BE față de planul (AMO).

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VIII.G.20. Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel $ABC(AB = AC = a)$ se ridică perpendicularele $AA' = BB' = CC' = a$. Fie M mijlocul lui $A'B'$, $N \in BB'$ și $P \in CC'$, astfel încît $AN = A'P$. Se cere :

a) distanța de la C' la dreapta AM ;

b) locul geometric al proiecției punctului C' pe dreapta BM cînd M descrie $(A'B')$;

c) să se arate că dreapta NP trece printr-un punct fix.

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VIII.G.21. Din vîrful A al dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara AS pe planul dreptunghiului. Proiecțiile punctului A pe dreptele SB și SD se notează cu H, respectiv K. Arătați că :

a) Dreptele BK, DH și SI sînt concurente, unde I este proiecția punctului A pe BD.

b) AH este perpendiculară pe planul (SBC).

c) Perpendicularele din H și K pe SC sînt concurente.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VIII.G.22. Se consideră perpendiculara în C pe planul unui triunghi ABC și un punct $D \neq C$, ce aparține ei. Notăm cu E și F picioarele perpendicularelor din A pe dreptele CB și respectiv BD.

a) Stabiliți dacă planele (AEF) și (ABD) sînt perpendiculare.

b) Fie G proiecția lui C pe dreapta AD și $m(\widehat{CAB}) = 90°$. Cercetați dacă :

1. $(CAD) \perp (ABD)$;
2. $(AEF) \parallel$ dreapta CG.

(Etapa municipală, 1986, București)

VIII.G.23. Fie O, A, B, C patru puncte astfel ca $OA \perp OB$; $OB \perp OC$; $OC \perp OA$ şi fie $OA = a$; $OB = b$ şi $OC = c$. Să se arate că : arate că :

a) Triunghiul ABC are toate unghiurile ascuţite.

b) Piciorul perpendicularei duse din punctul O pe planul (ABC) este ortocentrul H al triunghiului ABC. Calculaţi apoi distanţa OH.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

VIII.G.24. Pe trei semidrepte cu originea comună în O se consideră, respectiv, punctele A, B şi C. Ştiind că $OA \perp OB$, $OA \perp OC$ şi că : $S^2_{ABC} = S^2_{OBC} + S^2_{OCA} + S^2_{OAB}$ este adevărat că $OB \perp OC$? De ce ?

(Etapa judeţeană, 1986, Cluj)

VIII.G.25. Fie $ABCD$ un paralelogram şi O un punct exterior planului său. Notăm cu M, N, P şi Q picioarele perpendicularelor duse din O pe dreptele AB, BC, CD şi respectiv DA, iar cu S punctul de intersecţie al dreptelor MP şi NQ. Să se arate că $OS \perp (ABC)$.

(Etapa judeţeană, 1986, Sălaj)

VIII.G.26. Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel ABC, $AB \equiv AC$ şi $AB = a$ ducem perpendiculara AA'; $(AA' = a)$. Din A' ducem un segment $A'D = a\sqrt{2}$, perpendicular pe AA'. Dacă BD este perpendiculară pe AB şi dacă D este de aceeaşi parte a planului $(AA'B)$ ca şi C, atunci triunghiul DBC este echilateral.

(Etapa municipală, 1984, Bucureşti)

VIII.G.27. Fie ABC un triunghi, O un punct în planul său α, D un punct pe perpendiculara în O planul (ABC). Arătaţi că $AD \perp BC$ dacă, şi numai numai dacă, O se află pe înălţimea din A a triunghiului ABC.

(Etapa locală, 1985, Argeş)

VIII.G.28. Fie O punctul de intersecţie al mediatoarelor unui triunghi ABC şi M un punct nesituat în planul (ABC). Să se arate că $OM \perp$ $\perp (ABC)$ dacă şi numai dacă $AM = BM = CM$.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

CAPITOLUL III

UNGHI DIEDRU

VIII.G.29. Fie $ABCD$ un romb avînd $AB = 20$ cm, $AC = 32$ cm. Pe semidreapta AC se ia un punct E astfel că $AE = 50$ cm. În punctele A şi E, de aceeaşi parte a planului (ABC) se ridică pe aceasta perpendicularele AM şi EN astfel ca $AM = 30$ cm.

a) Să se determine EN astfel că planele (MBD) și (NBD) să fie perpendiculare.

b) Să se determine distanța dintre picioarele perpendicularelor duse din M și N pe dreapta DC.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VIII.G.30. În punctul O de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ se duce perpendiculară pe planul său pe care se ia punctul $M \neq O$. Fie P și Q picioarele perpendicularelor din C pe dreptele DB și respectiv MB.

a) Cercetați dacă planele (PQC) și (MDB) sînt perpendiculare.

b) Dacă $CR \perp DM$ unde $R \in MD$ și planele (PQC) și (PRC) sînt perpendiculare, atunci $MO = \frac{1}{2} AC$? Justificați.

(Etapa municipală, 1984, București)

VIII.G.31. Fie pătratul $ABCD$ de latura x și $AM = y(AM \perp (ABC))$.

a) Să se găsească cea mai mică valoare naturală a lui x pentru care lungimile laturilor triunghiului MDC sînt exprimate prin numere naturale consecutive.

b) Să se determine distanța de la A la planul (MDC).

c) Fie E și F proiecțiile lui A pe dreptele MB respectiv MD. Să se arate că dreapta EF este paralelă cu planul pătratului $ABCD$.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VIII.G.32. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt respectiv de 7 cm și 24 cm. Să se determine distanța de la vîrful unghiului drept la planul care trece prin ipotenuză și face cu planul triunghiului un unghi de 30°.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

VIII.G.33. Din vîrful A al unui triunghi echilateral ABC se duce AD perpendiculară pe planul triunghiului echilateral ABC iar din punctul D o perpendiculară pe BC. Știind că latura triunghiului este de $6\sqrt{3}$ cm și $AD = 8$ cm, calculați :

a) Perimetrul și aria triunghiului ADO (O centrul cercului circumscris triunghiului ABC).

b) Aria triunghiului DOE, E fiind piciorul perpendicularei din D pe BC.

c) Tangenta unghiului format de planele (ABC) și (DBC).

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VIII.G.34. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ cu unghiul de la baza mare de 30° și baza mică DC congruentă cu latura neparalelă și de lungime 6 cm. Din mijlocul M al bazei mici se ridică o perpendiculară pe planul trapezului și se ia pe aceasta un segment $MS = \sqrt{3}$ cm. Se cere :

a) Aria triunghiului SAB.

b) Măsura unghiului diedru dintre planele SAB și planul trapezului $ABCD$.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VIII.G.35. Se consideră semidreptele Ox, Oy, Oz, perpendiculare două cîte două și $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$, astfel încît $OA = a$, $OB = 2b$, $Oc = c$. Fie $M \in OB$, $MO \equiv MB$ și I piciorul perpendicularei duse din A pe MC. Se cere :

a) Lungimea segmentelor OI și AI.

b) O funcție trigonometrică a unghiului dintre planele (AMC) și (OAC).

c) Locul geometric al punctului I cînd M descrie segmentul OB.

(Etapa județeană, 1986, Arad)

VIII.G.36. Fie $ABCD$ un romb cu latura de 10 cm și diagonala $BD = 12$ cm. Pe latura AD se ia punctul M între A și D astfel ca $AM = 2$ cm. În punctul M se duce $MN = 9{,}6$ cm perpendiculară pe planul rombului. Se cere :

a) Distanța de la N la dreapta AB.

b) Unghiul plan corespunzător diedrului format de planul rombului cu planul determinat de punctele N, B și C.

c) Fiind dat un plan oarecare α și dacă notăm cu A', B', C', D' intersecția acestui plan cu perpendicularele în A, B, C, D, pe planul rombului, se poate afirma că patrulaterul (dacă există) $A'B'C'D'$ este un paralelogram.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VIII.G.37. Pe planul pătratului $ABCD$ se construiește perpendiculara AM, astfel încît $AC \equiv MO$, (O fiind centrul pătratului) și se notează cu E și F mijloacele segmentelor MB și MD, iar cu P intersecția dreptei AM cu planul (CEF). Să se arate că :

a) Planele (AEF) și (CEF) sînt perpendiculare.

b) Măsura unghiului diedru format de planele (CEF) și (ABC) este de $30°$.

c) $PA = 2PM$.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

CAPITOLUL IV

PROIECȚII ÎN SPAȚIU

VIII.G.38. Un triunghi ABC ($AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 7$ cm) are latura BC într-un plan P. Să se afle aria proiecției triunghiului ABC pe planul P știind că proiecția lui este un triunghi dreptunghic.

(Etapa locală, 1986, Bistrița-Năsăud ; Caraș-Severin)

VIII.G.39. Triunghiul isoscel ABC cu latura BC inclusă într-un plan, se proiectează pe acesta în triunghiul dreptunghic $DBC(m(\widehat{D}) = 90°)$, cu $DC = 5$ cm, $DB = 13$ cm. Să se calculeze măsurile laturilor triunghiului ABC.

(Etapa locală, 19833, Hunedoara)

VIII.G.40. Fie planul α şi dreptele d_1, d_2 astfel încît $d_1 \cap d_2 = \{M\}$; $d_1 \cap \alpha = \{A\}$; $d_2 \cap \alpha = \{B\}$, $AM = 2a$, $BM = 2a \cdot \sqrt{3}$, $AB = 4a$ şi $m(\widehat{d_1, \alpha}) = 45°$.

a) Calculaţi aria triunghiului AMB şi a proiecţiei ei pe planul α.

b) Demonstraţi că măsura unghiului plan corespunzător diedrului planelor α şi (AMB) este mai mare ca 45° şi mai mic ca 60°.

(Etapa locală, 1986, Bistriţa-Năsăud)

VIII.G.41. Proiecţia rombului $ABCD$ pe planul α este pătratul $AB'C'D'$ $(A \in \alpha)$. Dacă distanţa de la punctul de intersecţie a diagonalelor rombului la planul α este $\frac{a\sqrt{6}}{2}$, iar latura pătratului este a, să se afle :

a) Măsura unghiului plan corespunzător unghiului diedru determinat de planul rombului şi planul pătratului.

b) Aria rombului.

c) Unghiurile făcute de laturile rombului cu planul pătratului.

(Etapa judeţeană, 1986, Buzău)

VIII.G.42. Fie două drepte perpendiculare în M, care intersectează un plan α în B şi respectiv C. Ştiind că A este proiecţia lui M pe α şi că dreptele MC şi MB fac cu planul α unghiuri de 30° respectiv de 45° şi că $BC = 6$, să se afle :

a) Aria proiecţiei ortogonale a triunghiuluii MBC pe planul α.

b) Msăura unghiului format de planele (MBC) şi (ABC).

(Etapa judeţeană, 1985, Brăila)

VIII.G.43. Fie triunghiul ABC dreptunghic cu $m(A) = 90°$ şi segmentele BD şi CE perpendiculare pe planul (ABC), situate de aceeaşi parte a acestui plan astfel încît $BD \equiv AC$ şi $CE \equiv AB$. Fie F şi G proiecţiile punctelor B şi C respectiv pe dreptele AD şi AE.

a) Să se demonstreze că $BF \perp (ADC)$ şi $CG \perp (ABE)$.

b) Arătaţi că raportul ariilor proiecţiilor triunghiului ABC pe planele (ADC) şi (ABE) este egal cu raportul catetelor AB şi AC.

(Etapa judeţeană, 1986, Vrancea)

VIII.G.44. Se consideră un pătrat $ABCD$, semidreptele S_1 şi S_2 cu extremităţile în A, respectiv C, perpendiculare pe planul pătratului şi situate de aceeaşi parte a acestui plan şi punctele M, N, $(M \in S_1$ şi $N \in S_2)$. Să se demonstreze că :

a) Planele triunghiurilor (BDM) şi (BND) sînt perpendiculare pe planul (MAC).

b) Proiecţiile P şi Q ale punctelor A, C pe planele triunghiurilor (BDM), respectiv (BND) sint ortocentrele acestor triunghiuri.

c) Să se arate că BO este media geometrică a segmentelor AM şi CN, dacă triunghiul MON este dreptunghic în O, unde O este centrul pătratului $ABCD$.

(Etapa judeţeană, 1986, Teleorman)

CAPITOLUL V

POLIEDRE

VIII.G.45. Fiind dat cubul $ABCDA'B'C'D'$ și M mijlocul segmentului AB, dacă E este centrul pătratului $(BCC'B')$, să se arate că $D'E \perp (CEM)$.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VIII.G.46. Fie o prismă triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ cu $AB = AA' = a$. Să se calculeze distanțele :

a) De la A' la BC.

b) De la B' la linia mijlocie a bazei, linie mijlocie care este paralelă cu AC.

c) De la centrul P al feței $(BCC'B')$ la latura AB.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VIII.G.47. Un paralelipiped are toate muchiile egale cu a și toate fețele romburi, cu unghiurile ascuțite de $60°$. Să se calculeze aria și volumul paralelipipedului.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

VIII.G.48. Se dă o prismă oblică $ABCDA'B'C'D'$ cu baza un pătrat. Proiecția muchiei $B'C'$ pe planul (ABC) este muchia AD. Știind că $AB = 3$ cm, $AA' = 6$ cm să se afle volumul prismei și aria sa totală.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VIII.G.49. $ABCD$ este un patrulater convex de arie „a^2", înscris în cercul de centru O iar dreapta MO este perpendiculară pe planul (ABC), $(M \neq O)$. Planele ce conțin dreapta MO și sînt respectiv perpendiculare pe dreptele AB, BC, CD și DA intersectează aceste drepte în punctele E, F, G și respectiv H.

a) Stabiliți dacă punctele E, F, G, H sînt vîrfurile unui paralelogram.

b) Calculați volumul prismei cu baza patrulaterul cu vîrfurile E, F, G, H și înălțimea MO de lungime „a".

c) În cazul cînd prisma de la punctul „b" este regulată calculați aria totală a ei.

(Etapa municipală, 1986, București)

VIII.G.50. Fie A, B, C, D, puncte necoplanare, astfel că oricare două determină segmente congruente de lungime a și O_1, O_2, O_3, O_4 centrele triunghiurilor BCD, ACD, ABD și respectiv ABC.

a) Arătați că oricare două din punctele O_1, O_2, O_3, O_4 determină segmente de aceeași lungime, care se cere să se afle.

b) Arătaţi că oricare trei din punctele O_1, O_2, O_3, O_4 determină cîte un plan paralel cu unul din planele determinate de trei din punctele A, B, C, D.

c) Aflaţi volumul prismei cu baza BCD şi înălţimea egală cu lungimea perpendicularei din A pe planul (BCD).

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

VIII.G.51. Fie pătratul $ABCD$. În planul ce trece prin latura AB şi este perpendicular pe planul $(ABCD)$ se construieşte triunghiul echilateral AEB. Fie M un punct mobil pe latura AB, iar N proiecţia lui E pe dreapta MC, F mijlocul lui AB, O mijlocul lui CE şi H mijlocul lui DC.

a) Să se arate că $OC \equiv ON \equiv OF \equiv OB \equiv OH$.

b) Să se afle locul geometric al punctului N cînd M descrie segmentul AB.

(Etapa locală, 1986, Gorj)

VIII.G.52. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a.

a) Calculaţi distanţa AE de la punctul A la diagonala BD'.

b) Demonstraţi că $BD' \perp (AB'C)$.

c) Aflaţi măsura unghiului format de dreptele AB' şi AC.

(Etapa judeţeană, 1985, Argeş)

VIII.G.53. O bară metalică de forma unei prisme triunghiulare drepte are ca bază triunghiul ABC şi volumul V. Se duc medianele bazei BB' şi CC' şi apoi se strunjeşte această bară obţinîndu-se o altă prismă triunghiulară dreapta de aceeaşi înălţime şi de bază triunghiul $B'GC'$ $(G = BB' \cap CC')$. Notînd cu V_1 volumul prismei obţinute să se arate că $V = 12V_1$.

(Etapa judeţeană, 1986, Gorj)

VIII.G.54. Paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este dreptunghic, dacă şi numai dacă proiecţia punctului A' pe planul $(AB'D')$ este ortocentrul triunghilui $AB'D'$ şi proiecţia punctului B pe planul (ACB') este ortocentrul triunghiului ACB'.

(Etapa judeţeană, 1986, Iaşi)

VIII.G.55. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a şi se consideră punctul M mijlocul lui BC, T mijlocul lui AA' şi O' mijlocul lui $B'D'$. Se cere :

a) Forma secţiunii obţinute prin secţionarea cubului cu planul (MTO').

b) Perimetrul acestei secţiuni.

(Etapa judeţeană, 1985, Timiş)

VIII.G.56. În planul α, se consideră pătratele $ABCD$ şi $BCEF$. În punctele D şi F se ridică, de aceeaşi parte a planului, perpendicularele DV respectiv FP. Ştiind că $BC = a$, $VD = a$, $PF = 2a$, se cere :

a) Să se arate că triunghiul PVC este isoscel.

b) Să se calculeze distanţa de la P la planul (VBC).

c) Să se calculeze distanţa dintre centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor VBC şi PBC.

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

VIII.G.57. Fie A, B, C şi D, patru puncte necoplanare. Notăm cu G_1, G_2, G_3, centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ACD şi respectiv BCD.

a) Să se arate că dacă triunghiul ABC este dreptunghic sau echilateral, atunci şi triunghiul $G_1G_2G_3$ este dreptunghic sau echilateral.

b) În ipoteza că triunghiul ABD este echilateral şi CG_1 este perpendiculară pe planul determinat de A, B şi D, să se determine unghiul dreptelor AC şi BD.

(Etapa judeţeană, 1986, Suceava)

VIII.G.58. Se dau patru puncte în spaţiu : A, B, C, D. Să se determine planul α astfel încît A şi C să fie de o parte, iar B şi D de cealaltă parte a planului α, iar cele patru puncte să fie la distanţe egale de planul α.

(Etapa judeţeană, 1985, Gorj)

VIII.G.59. Din punctul V pornesc trei semidrepte a, b, c necoplanare toate trei. Pe semidreapta a luăm punctele A şi A', pe semidreapta b luăm punctele B şi B' şi pe semidreapta c luăm punctele C şi C' astfel încît laturile triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ să nu fie, respectiv, paralele. Demonstraţi că dreptele AB şi $A'B'$; BC şi $B'C'$; CA şi $C'A'$ se întîlnesc în trei puncte coliniare.

(Etapa locală, 1984, Suceava)

VIII.G.60. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Să se demonstreze că dreptele care unesc cîte un punct cu centrul de greutate al triunghiului determinat de celelalte trei puncte, sînt concurente.

(Etapa judeţeană, 1985, Suceava)

VIII.G.61. Fie un cub cu baza $ABCD$ şi muchia laterală VA. Se duc perpendicularele din A pe VB, CV şi VD. Se notează respectiv cu A_1, A_2, A_3, picioarele acestor perpendiculare. Demonstraţi :

a) $CV \perp (A_1A_2A_3)$.

b) $AA_1A_2A_3$ este patrulater inscriptibil.

(Etapa judeţeană, 1985, Brăila)

VIII.G.62.

a) Să se demonstreze că pătratul lungimii diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este mai mare sau egal cu jumătate din aria totală a paralelipipedului.

b) Să se determine numărul laturilor poligonului convex de la baza prismei care are 130 diagonale.

(Etapa judeţeană, 1986, Suceava)

VIII.G.63. Se pot numerota muchiile unui cub cu numerele 1, 2, . . . , 12 astfel încît sumele numerelor corespunzătoare celor trei muchii care ajung în acelaşi vîrf să fie egale ?

(Etapa judeţeană, 1986, Dolj)

VIII.G.64. Demonstrați că cele patru fețe ale unui tetraedru nu pot fi triunghiuri dreptunghice congruente.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

INDICAȚII

VIII.G.1. În $\triangle AB''C'$, MN este linie mijlocie, iar $B''C' \equiv BC$. Măsurile lungimilor segmentelor MN, PQ, RS sînt egale cu măsurile lungimilor laturilor triunghiului medial triunghiului ABC.

VIIIG.2. Să prelungim dreapta AF și să notăm intersecția dreptelor AF și CD cu punctul P. Să demonstrăm că $AF \equiv FP$, apoi să cercetăm dacă în planul (CBD) există o dreaptă paralelă cu EF.

VIII.G.3. Căutați un contraexemplu.

VIII.G.4. Poligonul de secțiune dintre planul $(A'B'C)$ și planele paralele determinate de dreptele AA', BB', CC' și DD' este un paralelogram (De ce ?). Să considerăm planul care conține dreptele paralele BB' și CC'. Construim paralelogramul $CC'B'F$ unde $F \in BB'$ astfel încît $B'F = a$. Urmează ca $B'C' \parallel FC$ dar și $B'C' \equiv FC$ (de ce ?). Patrulaterul $A'DCF$ este un paralelogram, deci $FC \parallel A'D$ dar și $FC \equiv A'D$ (de ce ?).

De aici urmează că putem localiza punctul unde planul $(A'B'C')$ este intersectat de paralela dusă prin punctul D.

VIII.G.5.

a) Plecînd din punctul M, construim poligonul de secțiune ducînd, de exemplu, $MQ \parallel AC$ ș.a.m.d.

De demonstrat că unind punctele N și M se obține $NM \parallel QP$.

b) Teorema fundamentală a asemănării și apoi aflarea celei de a patra proporționale.

VIII.G.6. Distanțele de la punctele A, B, C, D ($ABCD$ fiind paralelogram) la planul α le notăm, de exemplu: AA', BB', CC', DD' (aceste drepte se mai numesc și „proectante", față de planul α). Figura geometrică $A'B'C'D'$ este paralelogram (de ce ?). Notăm intersecția diagonalelor paralelogramului $A'B'C'D'$ cu O' iar a diagonalelor paralelogramului $ABCD$ cu O. Dreapta OO' este perpendiculară pe planul α (de ce ?) iar, de exemplu, figura geometrică $(DD'BB')$ este trapez dreptunghic (de ce ?) etc.

VIII.G.7. Cu ajutorul riglei și al compasului se poate construi $\triangle BDC$, construind mai întîi $\triangle$ isoscel ACD. În continuare, calculăm măsura înălțimii CF ($F \in AD$), apoi măsura AF și apoi măsura BC.

Vom ține seama că $BE = 2 \cdot EC$ (de ce ?) și apoi că $\triangle BAE \sim \triangle BDC$.

VIII.G.8.

a) Notăm $BN = x$ şi apoi calculăm măsurile laturilor $\triangle CMN$.

b) Să ne gîndim în care din vîrfurile $\triangle CMN$ poate fi un unghi drept ?

VIII.G.9.

a) Dreapta AC este perpendiculară pe planul (BDE); sau altfel : teorema celor trei perpendiculare.

b) Fixăm drept bază pentru cele două triunghiuri segmentul AC de lungime constantă. În $\triangle ABC$ înălțimea relativă bazei AC, este constantă BO, iar în $\triangle APC$ înălțimea relativă bazei AC (P variabil) este PO de măsură variabilă.

VIII.G.10.

a) Notăm de exemplu $AA' = x$. Nu contează dacă $a > x$ sau $a < x$ (de ce ?). Oricum $x \neq a$ (de ce ?). Calculăm măsurile laturilor $\triangle A'CB'$ (o latură are măsură constantă).

b) Asemănător.

VIII.G.11.

1) Deci : $A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$. Ducem din punctul B' paralele la laturile BA şi BC şi, de exemplu, din A' o paralelă la AC. Este suficient să presupunem, de exemplu $1 < x < y$ (de ce ?).

2) Odată găsită relația la punctul 1) o explicităm...

VIII.G.12. Un plan α este perpendicular pe o dreaptă d, dacă toate dreptele din planul α formează unghiuri drepte cu dreapta d. Putem spune că în aceste condiții $d \perp \alpha$ (de ce ?).

În $\triangle AMP'$ calculăm măsura segmentului AP, apoi în $\triangle BPC$ calculăm măsura medianei PM („teorema medianei" într-un triunghi oarecare).

VIII.G.13.

a) Fie A' piciorul perpendicularei duse din punctul A pe planul α ($AA' = 3$ cm). Descriem un cerc cu centrul în A' și raza egală cu 4 cm. Fie B un punct de pe acest cerc. Evident $AB = 5$ cm (de ce ?).

b) Triunghiul $BA'C$ este isoscel $A'B = A'C = 4$ cm și $BC = 5$, deci...

VIII.G.14. Se aplică teorema celor trei perpendiculare.

VIII.G.15. Să exprimăm aria trapezului folosind formula ariei unui paralelogram, baza paralelogramului fiind $AB = 7$ cm. Notăm cu P proiecția punctului M pe latura AB ; deci, înălțimea paralelogramului (care va trebui construit folosind trapezul dat) va fi $2 \cdot MP$ (de ce ?).

VIII.G.16. Ne gîndim că latura AB poate fi baza mică sau baza mare a trapezului. Să construim cu rigla și compasul trapezul descris de textul problemei și vom decide care dintre baze reprezintă latura AB. Vom ține seama de teorema unghiului de 30 dintr-un triunghi dreptunghic, apoi de teorema celor trei perpendiculare.

VIII.G.17.

a) Măsurile laturilor $\triangle ABD$ fiind cunoscute, calculăm pătratele măsurilor lor, în ideea...

b) Evident, teorema celor trei perpendiculare.

VIII.G.18.

1. Proiectăm punctul O pe planul (ABC). Vom demonstra că O' se găsește în interiorul $\triangle ABC$.

2. MN se numește perpendiculara comună a dreptelor AB și OC. Într-un triunghi isoscel mediana relativă bazei este și înălțime. Demonstrați și „unicitatea" perpendicularei comune a două drepte oarecare.

VIII.G.19.

a) Comparăm triunghiurile OAB și ABM.

b) Ducem din C o perpendiculară pe planul (ABM) ; notăm C' piciorul acestei perpendiculare. Din care motiv $C' \in AB$? Punctul D se va găsi pe dreapta AM între A și E (de ce ?). Calculăm valoarea raportului $\frac{OC}{CB}$ (de ce ?).

c) În $\triangle OAM$ se aplică teorema lui Pitagora.

d) Cercetăm care este poziția dreptei OA față de planul (MAB).

VIII.G.20.

a) $C'A' \perp (AA'BB')$ (de ce ?). Folosind acest rezultat precum și teorema celor trei perpendiculare, se poate afla care este proiecția punctului C' pe dreapta AM ?

b) Procedăm asemănător ca la punctul a). Observăm că oricare ar fi dreapta BM ($M \in A'B'$ între A' și B' și variabil), proiecția punctului A' pe dreapta BM, împreună cu punctele B și A' realizează un triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză BA' are măsură constantă.

c) Congruența $AN \equiv PA'$ ne conduce la congruența $BN \equiv PC'$ (de ce ?). În dreptunghiul $BB'CC'$ cercetăm cum se comportă mijlocul segmentului NP cînd $BN \equiv PC'$, dar punctele P și N sînt variabile.

VIII.G.21.

a) Ne gîndim la teorema celor trei perpendiculare, după care cercetăm ce reprezintă dreptele BK, DH și SI în $\triangle SDB$.

b) Care este condiția ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan ? Urmărind aceeași idee, arătați că $AK \perp (SDC)$.

c) Teorema celor trei perpendiculare ; apoi ne gîndim că din punctul A se poate duce pe dreapta SC o perpendiculară și numai una.

VIII.G.22.

1. Dacă o dreaptă „a" este perpendiculară pe un plan „α", atunci orice plan care va conţine dreapta „a" va fi perpendicular pe planul „α". Ori, $AF \perp BD$ (ipoteză). Ne gîndim la reciproca teoremei celor trei perpendiculare (care ?) ştiind că $AE \perp (BCD)$ (de ce ?).

2. a) $(AD) \perp (AB)$ (de ce ?), apoi aceeaşi condiţie ca la 1.

b) Planele perpendiculare (CAD) şi (ABD) au ca dreaptă de intersecţie dreapta AD, ori $CG \perp AD$ (din ipoteză) deci $CG \perp (ABD)$ (de ce ?). Rezultă $CG \parallel (AEF)$ (prin ce teoremă ?)

VIII.G.23.

a) Propunem ca ilustrarea grafică (triedul tridreptunghic) să conţină vîrful C în spatele planului (ABC). Ducem $AA_1 \perp BC$. Punctul A_1 piciorul perpendicularei ; ($OA_1 \perp BC$ (de ce ?). Cercetăm unghiurile triunghiului ABA_1.

b) În $\triangle AOA_1$ ducem înălţimea triunghiului, relativă laturii AA_1.

VIII.G.24. Să facem notaţii simplificatoare, notînd lungimile segmntelor OA, OB, OC respectiv a, b, c. Evident $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$. Să construim $OD \perp BC$ şi să notăm $OD = x > 0$. Rezultă $AD \perp BC$ (de ce ?). Mai notăm $AD = y > 0$ şi apoi scriem relaţia dintre ariile triunghiurilor din ipoteză... Consultaţi „Lecţii complementare de geometrie" de N. Mihăileanu şi anume „Tetraedrul tridreptunghic". Relaţia dintre arii este datorată lui Tinseau (1780) şi se numeşte „Teorema lui Tinseau". Problema este o reciprocă a teoremei lui Tinseau !

VIII.G.25. Ne gîndim la teorema celor trei perpendiculare. Notăm O' proiecţia punctului O pe planul $(ABCD)$. Ce relaţie există între punctele O' şi S ?

VIII.G.26. Cum să ducem $DA' \perp AA'$ şi totodată $DB \perp BA$, punctul D fiind de aceeaşi parte a planului $(AA'B)$ ca şi punctul C, dar şi de aceeaşi parte a planului (ABC) ca şi punctul A' ? Ne gîndim că DA' se află într-un plan perpendicular pe AA' iar DB într-un plan perpendicular pe AB. Din D să ducem o perpendiculară pe planul $(AA'B)$. Notăm piciorul acestei perpendiculare D'. Unim D' cu A' ; $D'A' \perp AA'$ (de ce ?). Unim D' cu B ; $O'B \perp AB$ (de ce ?). Mai rezultă şi $DD' \parallel AC$, dar şi $DD' = AC = a$ (de ce ?). Calculăm măsurile segmentelor DB, BC, CD...

VIII.G.27. Demonstrăm două propoziţii :

Directa : dacă $DO \perp ABC$ şi $AD \perp BC$ atunci $AO \perp BC$.

Reciproca : dacă $DO \perp (ABC)$ şi $AO \perp BC$ atunci $AD \perp BC$. Sau invers ! Condiţia ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan.

VIII.G.28. Demonstrăm două propoziţii :

Directa : Fie ABC un triunghi şi M un punct nesituat în planul (ABC). Dacă $MA \equiv MB \equiv MC$, atunci punctul M se proiectează pe planul (ABC) în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Vom urmări congruenţa unor triunghiuri dreptunghice.

Reciproca : Fie ABC un triunghi şi M un punct nesituat în planul (ABC). Dacă punctul M se proiectează pe planul (ABC) şi în centrul cercului circumscris $\triangle ABC$, atunci $MA \equiv MB \equiv MC$. Vom urmări congruenţa unor triunghiuri dreptunghice.

VIII.G.29.

a) Să figurăm unghiul plan corespunzător diedrului determinat de planele (MBD) şi (NBD). Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Ce condiţie vom impune unghiului MON şi ce relaţie va rezulta între laturile $\triangle MON$?

b) Teorema celor trei perpendiculare aplicată de două ori va evidenţia distanţa căutată. Notăm de exemplu : A' şi E' proiecţiile punctelor A şi E pe dreapta DC.

VIII.G.30.

a) Da, dacă există o dreaptă într-unul din plane, perpendiculară pe celălalt plan.

b) O latură a unghiului plan corespunzător diedrului format de planele perpendiculare (PQC) şi (PRC) este QP (de ce ?), apoi cercetăm unghiurile patrulaterului $MRPQ$.

VIII.G.31.

a) Triunghiul MCD fiind dreptunghic în D (de ce?) şi $x = DC < DM$ (de ce ?) are cea mai mică valoare naturală $x = 3$ (de ce ?).

b) Segmentul a cărui măsură este chiar distanţa de la punctul A la planul (MDC), se găseşte inclus în planul (ADM) (de ce ?).

c) De exemplu, calculăm şi distanţa de la punctul A la planul (MBC).

VIII.G.32. Să punem în evidenţă unghiul plan corespunzător unghiului diedru format de planul (ABC) şi planul ce trece prin ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC. Să încadrăm acest unghi într-un triunghi dreptunghic.

VIII.G.33. a), b), c) Mai întîi să figurăm punctul E, (teorema celor trei perpendiculare) apoi punctul O. Triunghiurile ADO şi DOE au aceeaşi înălţime ?

VIII.G.34.

a) Pentru calculul măsurii înălţimii $\triangle SAB$ (isoscel, de ce ?) relativă laturii (AB), teorema celor trei perpendiculare.

b) Rezultă din precedenta.

VIII.G.35.

a) Vom desena un triedru tridreptunghic, apoi relaţii metrice într-un $\triangle$ dreptunghic.

b) Vom construi unghiul plan corespunzător unghiului diedru, ţinînd cont că muchia diedrului respectiv este dreapta AC.

c) Oricare ar fi poziţia punctului $M \in OB$, punctul I se găseşte în planul (BOC), iar triunghiurile dreptunghice de felul $\triangle OIC$ au aceeaşi ipotenuză şi anume OC.

VIII.G.36.

a) Evident, ne gîndim la teorema celor trei perpendiculare.

b) Dreapta de intersecţie dintre planele (NBC) şi $(ABCD)$ fiind BC, pe ea trebuie să determinăm un punct, de exemplu, P astfel încît $MP \perp BC$ şi $NP \perp BC$ şi $MP \subset (NBC)$ şi $NP \subset (ABC)$.

c) Dacă patrulaterul $A'B'C'D'$ are laturile opuse paralele, atunci $A'B'C'D'$ este paralelogram !

VIII.G.37.

1. Triunghiurile CEF şi AEF sînt isoscele (de ce ?). În $\triangle CEF$ şi $\triangle AEF$ notăm cu R, picioarele înălţimilor duse din C şi A pe (EF). Să cercetăm care este măsura segmentului RO din $\triangle ARC$.

2. Dreapta CR intersectează dreapta AM în punctul P (de ce ?). Să studiem care este lungimea segmentului AR în triunghiul MAO şi să corelăm acest rezultat cu rezultatul de la punctul precedent.

3. Vom cerceta care sînt măsurile segmentelor determinate de transversala CRP pe laturile $\triangle$ dreptunghic MAO.

VIII.G.38. Notăm A' proiecţia punctului A pe planul P şi ţinem cont că $\triangle ABC$ nu este triunghi dreptunghic. Stabilim în $\triangle A'BC$, care dintre unghiuri are măsura de $90°$; calculăm măsura segmentului AA'.

VIII.G.39. AB nu poate fi congruentă cu AC (de ce ?)

Dacă, $AB \equiv BC$, calculăm măsurile lungimilor BC, AD, AC. Asemănător, dacă $AC \equiv CB$.

Cercetăm dacă în ambele cazuri $\triangle ABC$ există !

VIII.G.40.

a) Cercetăm dacă între măsurile segmentelor AM, AB, MB există vreo relaţie, apoi notînd M' proiecţia punctului M pe planul α, determinăm măsura segmentului MM' etc....

b) Notăm măsura unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele α şi (AMB), de exemplu, θ. Cercetăm dacă $\frac{1}{2} < \cos\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$. De ce ?

VIII.G.41.

a) Să cercetăm dacă dreapta BD nu este paralelă cu planul α şi dacă punctul de intersecţie al diagonalelor rombului nu se proiectează în punctul de intersecţie al diagonalelor pătratului $AB'C'D'$.

b) Folosim unele din rezultatele descoperite la punctul precedent.

c) Analog.

VIII.G.42.

a) Întrebuinţăm notaţii simplificatoare, de exemplu, notăm măsura segmentului $AM = x$. Să exprimăm şi măsura segmentelor MB, MC, AB, AC funcţie de x. Determinăm apoi măsura necunoscută x în ipoteza $BC = 6$.

b) Sin $(\sphericalangle \widehat{MNA}) = \frac{AM}{MN}$ deci calculăm măsurile segmentelor AM şi MN.

VIII.G.43.

a) Evident, vom arăta că dreapta BF este perpendiculară pe două drepte concurente conţinute în planul (ADC) şi că dreapta CG este perpendiculară pe două drepte concurente conţinute în planul (ABE).

b) Odată rezolvat punctul a) observăm că proiecţia vîrfului B pe planul (ADC) este tocmai punctul F etc...

VIII.G.44.

a) Să descoperim o dreaptă inclusă de exemplu în planul (BDN) care să fie perpendiculară pe două drepte concurente din planul (MAC).

b) Problemă generală : dacă SA, SB, SC sînt perpendiculare două cîte două, atunci punctul S se proiectează în ortocentrul $\triangle ABC$.

c) Notăm diagonala pătratului $2a$ şi $AM = x$; $CN = y$. Scriem că triunghiul MON este dreptunghic în O ; cum ?

VIII.G.45. Va trebui să precizăm care este poligonul de secţiune dintre cubul dat şi planul (CEM) şi apoi să cercetăm dacă $D'E \perp (MEC)$. Probabil va trebui să demonstrăm că $D'E$ este perpendiculară pe două drepte concurente situate în planul (MEC). Să ducem un plan „ajutător" şi anume $(DD'E)$. Notăm $(DD'E) \cap (ABCD) = DF$. Cercetăm dacă dreptele DF şi MC au una faţă de alta o poziţie particulară. Cercetăm şi măsura unghiului dreptelor $D'E$ şi ME.

VIII.G.46.

a) Fiind vorba de distanţa de la un punct la o dreaptă (spaţiu) după ce stabilim natura feţelor $(AA'BB')$, $(BB'CC')$ şi $(CC'AA')$, ne gîndim la teorema celor trei perpendiculare.

b) Asemănător cu a).

c) Ca la punctele precedente.

VIII.G.47.

Întrebuinţăm notarea obişnuită : paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$. De exemplu, în punctul A segmentele AA', AD şi AB formează un triedru astfel încît $m(A'\widehat{A}D) = m(\widehat{DAB}) = m(A'\widehat{A}B) = 60°$. Este posibilă această construcţie ? Dacă da, atunci ce reprezintă dreapta AC pentru unghiul $\widehat{DAB}$ şi care este măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(ABCD)$ şi $(AA'CC')$?

VIII.G.48. Un desen corect ajută la înțelegerea problemei (nu rezolvă problema). Ne gîndim că $B'A \perp (ABCD)$ și $AD \perp AB$.

VIII.G.49.

a) Să rezolvăm o problemă de geometrie plană : fie $ABCD$ un patrulater convex inscriptibil și O centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$; fie E, F, G, H proiecțiile centrului O pe laturile patrulaterului $ABCD$ (în ordinea descrisă). Să se demonstreze că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram. Evident ne vom gîndi la linia mijlocie într-un triunghi.

b) Folosim faptul că $EFGH$ este paralelogram.

c) Gîndim că $EFGH$ este pătrat, deci diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt perpendiculare, congruente și se înjumătățesc una pe alta.

VIII.G.50.

a) Dreapta BO_1 este înălțime în $\triangle BCD$; tot așa dreapta AO_2 este înălțime în $\triangle ACD$. Notăm $BO_1 \cap AO_2 = E$. Punctul E aparține dreptei CD și $CE \equiv ED$ (de ce ?). Calculăm măsura segmentului O_1O_2 din $\triangle AEB$ etc...

b) Folosind rezultatele obținute la punctul precedent, cercetăm dacă este îndeplinită condiția de paralelism dintre două plane.

c) Avînd în vedere că $AB \equiv AC \equiv AD$, unde se proiectează punctul A pe planul (BCD) ?

VIII.G.51.

a) Să construim o prismă triunghiulară regulată dreaptă ajutătoare $ABCDE'$ în care triunghiul echilateral ABE este bază prismei iar planul pătratului $ABCD$, perpendicular pe planul (ABE) este o față laterală a prismei regulate și drepte $ABEDCE'$. Uneori, asemenea construcții ajutătoare permit observarea mai rapidă a unor relații dintre laturi sau unghiuri, înlesnind astfel rezolvarea problemei.

Vom ține cont că $\triangle ENC$ este dreptunghic în N iar punctul O este mijlocul segmentului EC.

b) În $\triangle$ dreptunghic CNF ipotenuza CF are măsura constantă.

VIII.G.52.

a) Distanța AE trebuie gîndită într-un triunghi dreptunghic. Calculăm și măsura segmentului BE.

b) Fie O centrul pătratului $ABCD$. Dreapta de intersecție dintre planele $(AB'C)$ și $(BB'DD')$ este $B'O$. Notăm $BD' \cap (AB'C) = \{S\}$; $S \in B'O$ și cercetăm în dreptunghiul $(DD'BB')$ care este poziția dreptelor BD' și $B'O$. Calculăm și măsura segmentului SB.

c) Cercetăm laturile $\triangle AB'C$.

VIII.G.53. Rezolvaţi două probleme de geometrie plană. Prima : fie *ABC* un triunghi oarecare şi *G* centrul lui de greutate ; triunghiurile *GAB*, *GBC* şi *GCA* sînt echivalente. A doua : fie *ABC* un triunghi oarecare şi *A'*, *B'*, *C'* respectiv mijloacele laturilor *BC*, *CA* şi respectiv *AB*. Triunghiul medial *A'B'C'* şi triunghiurile *AB'C'*, *BC'A'* şi *CB'A'* sînt echivalente. Consultaţi „Geometria triunghiului" de Traian Lalescu.

VIII.G.54. Avem de demonstrat două poziţii :

a) Vîrful unui tetraedru, în care muchiile opuse sînt perpendiculare (tetraedru ortogonal) se proiectează pe faţa opusă (triunghi) în ortocentrul triunghiului. De exemplu, consideraţi tetraedrele *A'AB'D'* şi *BCB'A*.

b) Dacă vîrful unui tetraedru se proiectează pe faţa opusă (triunghi) în ortocentrul triunghiului, atunci muchiile opuse ale tetraedrului sînt perpendiculare (este un tetraedru ortogonal).

Consultaţi „Probleme de geometrie" de G. Ţiţeica, cap. XVIII — Poliedre şi „Planul şi spaţiul Euclidian" de Dan Brînzei, cap. „Tetraedre ortocentrice (sau ortogonale)".

VIII.G.55. Pentru a determina cîte un punct comun feţelor cubului şi planului (*TOM*), se duc plane ajutătoare perpendiculare pe planul (*ABCD*). În acest mod obţinem dreptele de intersecţie dintre feţele cubului şi planul (*TOM*).

VIII.G.56.

a) Vom calcula măsurile laturilor (Pitagora) şi apoi vom cerceta măsurile laturilor anumitor triunghiuri dreptunghice.

b) Uneori este bine să completăm desenul, ducînd drepte sau plane ajutătoare pînă ce obţinem reprezentarea unor figuri sau poliedre cunoscute, în care diverse poziţii dintre drepte (unghiuri) sînt mai uşor de înţeles.

Să construim prisma dreaptă *AFEDA'PE'D'*. Care este poligonul de secţiune dintre planul (*BCV*) şi prisma construită ?

c) Cercetăm unghiurile triunghiurilor *VBC* şi *PBC* şi apoi fixăm centrele cercurilor circumscrise acestora.

VIII.G.57.

a) Figurînd „unele" din medianele feţelor tetraedrului *ABCD*, vom arăta că laturile $\triangle\, G_2G_1G_3$ sînt paralele cu laturile $\triangle\, ABC$.

b) În ipoteza de mai sus punctul G_1 este ortocentrul $\triangle\, ABD$ dar şi centrul cercului circumscris acestui triunghi ; aşadar, punctul *C* se proiectează în ortocentrul triunghiului *ABD*, iar muchiile *AB* şi *CD* fiind muchii opuse rezultă că... şi totodată $CA \equiv CB \equiv CD$ (de ce ?).

VIII.G.58. Folosim tetraedrul $ABCD$.

Deoarece punctele A și C au aceeași depărtare față de planul α, urmează că dreapta AC este paralelă cu planul α. La fel gîndim despre punctele dreptei BD. Fie M, N, P, Q puncte coplanare care să aparțină respectiv segmentelor AB, BC, CD și DA astfel încît $MN \parallel AC \parallel PQ$ și $NP \parallel BD \parallel MQ$. Planul $(MNPQ)$ este paralel cu dreptele AC și BD. Notăm C' și D' proiecțiile punctelor C și D pe planul $(MNPQ)$. Intersecția dreptelor $C'D'$ și CD este tocmai punctul P (de ce ?). Condiționînd că $CC' \equiv DD'$, obținem că planul $(MNPQ) = \alpha$. Din $CC' \equiv DD'$ rezultă că $CP \equiv PD$ (de ce ?).

VIII.G.59. Fie un unghi triedru cu vîrful în V și fie α și β două plane neparalele care intersectează triedrul dat. Notăm $\alpha \cap \beta = d$.

Punctele de intersecție dintre dreptele a, b, c și planele α și β sînt respectiv A și A' ; B și B' ; C și C'. Planele α și β fiind neparalele rezultă că au o dreaptă comună (dreapta de intersecție), iar dreptele AB și $A'B'$, BC și $B'C'$, CA și $C'A'$ sînt concurente. Notăm intersecțiile lor respectiv M, N și P. Ce putem spune despre punctele M, N și P și dreapta d, de intersecție dintre α și β ? Consultați „Lecții complementare de geometrie" de N. Mihăileanu și anume „Rolul spațiului" și „Triunghiuri omologice".

VIII.G.60. Aceasta este o teoremă de geometrie în spațiu și se numește „teorema lui Commandino" (1509—1575). Notăm de exemplu G_1 centrul de greutate opus punctului A, G_2 cel opus punctului B, G_3 cel opus punctului C și G_4 cel opus punctului D. Fie E piciorul medianei DG_1 $E \in BC$ și notăm $DG_4 \cap AG_1 = \{G\}$. (Dreptele DG_4 și AG_1 sînt concurente ?). Calculăm valoarea raportului $\frac{GG_1}{GA}$ etc...

VIII.G.61.

a) Să cercetăm ce reprezintă punctele A_1 și A_3 pentru fețele cubului, apoi să determinăm poligonul de secțiune dintre planul (AA_1A_3) și fețele cubului dat. Să notăm P intersecția dintre planul (AA_1A_3) și dreapta CV. Arătați că $CV \perp (AA_1A_3)$ deci $CV \perp AP$ și deci $P = A_2$, de unde va rezulta că $CV \perp (A_1A_2A_3)$, dar și că punctele A, A_1, A_2, A_3 sînt coplanare.

b) Poligonul de secțiune dintre planele $(AA_1A_2A_3)$ și fețele cubului este un triunghi echilateral, A_2 fiind centrul lui de greutate.

VIII.G.62.

a) Notăm dimensiunile paralelipipedului a, b, c ($a, b, c \in R_+$). Calculînd pătratul diagonalei paralelipipedului și aria lui totală, obținem următoarea problemă : să se demonstreze că : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ (unde $a, b, c \in R_+$).

b) Două muchii opuse paralele (care nu aparțin unei fețe a prismei) determină un plan care conține două din diagonalele prismei.

Aceste două diagonale ale prismei coincid cu diagonalele paralelogramului de secţiune determinat de planul celor două muchii opuse şi paralele şi care intersectează bazele prismei. Ori, un astfel de plan de secţiune intersectează baza prismei după o dreaptă care este chiar o diagonală a poligonului convex de bază. Aşadar, putem număra diagonalele prismei, numărînd diagonalele poligonului convex de bază.

VIII.G.63. Notăm vîrfurile cubului $A_1, A_2, \dots A_8$. De fapt avem de rezolvat o problemă de aritmetică. Să ne gîndim că fiecare număr scris pe o muchie ajunge în două vîrfuri. Apoi, dacă notăm $S_1, S_2, \dots, S_8$ sumele numerelor corespunzătoare tripletelor de muchii care ajung respectiv în vîrfurile $A_1, A_2, \dots, A_8$, atunci calculînd $S_1 + S_2 + \dots + S_8$ ar trebui să obţinem...

VIII.G.64. Dar un tetraedru poate avea cele patru feţe triunghiuri dreptunghice ?

Răspunsul este afirmativ. Arătaţi că la un astfel de tetraedru nici un vîrf nu poate fi un triedru tridreptunghic. În continuare, metoda reducerii la absurd. Consultaţi „Lecţii complementare de geometrie“ de N. Mihăileanu şi anume „Tetraedrul tridreptunghic“.

Lucrarea executată sub comanda nr. 1 494 la Oficiul Economic Central „Carpaţi", Întreprinderea Poligrafică „Bucureştii Noi", str. Hrisovului nr. 18 A, sectorul 1, Bucureşti

